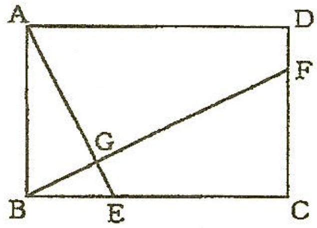
公立入試　図形問題（相似や三平方の定理の応用）

毎年 3(2)①②，(3)①②と出題されています。(①は比較的、解きやすい)

2A (2)　図で，四角形ＡＢＣＤは長方形である。Ｅ，Ｆはそれぞれ辺ＢＣ，ＤＣ上の点で，ＥＣ＝２ＢＥ，ＦＣ＝３ＤＦである。また，Ｇは線分ＡＥとＦＢとの交点である。

　ＡＢ＝４cm，ＡＤ＝６cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

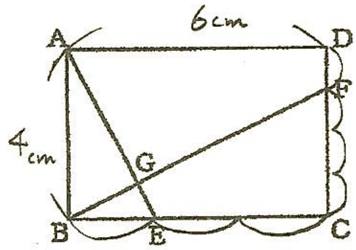


①　線分ＡＧの長さは線分ＧＥの長さの何倍か，求めなさい。

②　３点Ａ，Ｆ，Ｇが周上にある円の面積は，３点Ｅ，Ｆ，Ｇが周上にある円の面積の何倍か，求めなさい。

2A (2)　図で，四角形ＡＢＣＤは長方形である。Ｅ，Ｆはそれぞれ辺ＢＣ，ＤＣ上の点で，ＥＣ＝２ＢＥ，ＦＣ＝３ＤＦである。また，Ｇは線分ＡＥとＦＢとの交点である。

　ＡＢ＝４cm，ＡＤ＝６cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

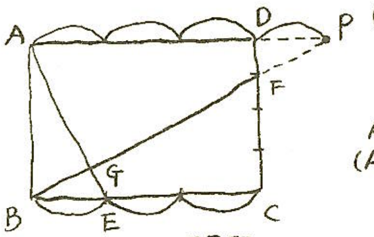


①　線分ＡＧの長さは線分ＧＥの長さの何倍か，求めなさい。

②　３点Ａ，Ｆ，Ｇが周上にある円の面積は，３点Ｅ，Ｆ，Ｇが周上にある円の面積の何倍か，求めなさい。

① 考え方 その1

相似な三角形をつくるために，
長方形の外に線をのばす方法

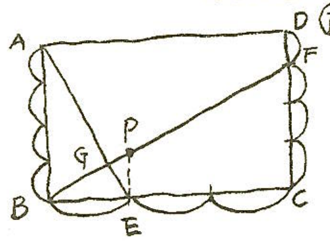


㋐ BFとADをのばし
交点をPとすると
AD//BC だから
(AP)
△DFP∽△CFB
△AGP∽△EGB
となる。

㋑ △DFP∽△CFBで
DF : CF = DP : CBより
1　3
CB = 3DPとなり
上図のように AP : EB = 4 : 1とわかる。

㋒ △AGP∽△EGBで
AG : EG = AP : EB = 4 : 1　よって AGはGEの4倍

考え方 その2　相似な三角形をつくるために
長方形の中に平行線をひく方法



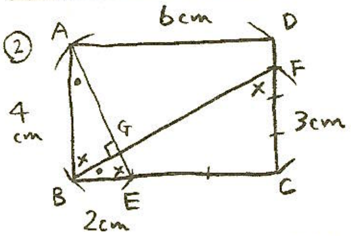
㋐ 求めたいAG : GEにかかわるような相似な三角形に目がつけれるよう，平行線をひく。
PE // FCとなる
そうすると
△BPE∽△BFC
△PGE∽△BGA
となる。

㋑ △BPE∽△BFCで
BE : BC = PE : FCより
1　3
FC = 3PE

㋒ 上図のように
DF : FC = 1 : 3で
AB = DC だから
AB : FC = 4 : 3となる。
4FC = 3AB
$\frac{4}{3}$FC = AB

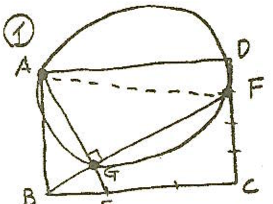
㋓ △PGE∽△BGAで
AG : EG = AB : EP
㋑と㋒から
AB = $\frac{4}{3}$FC
= $\frac{4}{3}$ × 3PE
= 4PEなので
AG : EG = 4PE : PE
= 4 : 1
よって 4倍

②

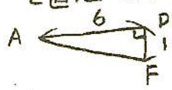


㋐ AB = 4cm, AD = 6cmだから
BE = 2cm, FC = 3cmとわかる。
△ABEと△BCFで
AB : BC = BE : CF = 2 : 3, ∠ABE = ∠BCD = 90°
4cm　6cm　2cm　3cm
だから △ABE∽△BCF
ということは ∠BAE = ∠CBF = •印
∠AEB = ∠BFC = ×印
FC//ABで錯角だから
∠BFC = ∠ABG = ×印となるから
△ABG∽△AEB∽△BFCとなり
∠AGB = ∠ABE = 90°とわかる。

㋑

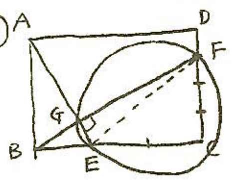


㋐で∠AGF = 90°とわかったので
上図のような3点を通る円がかけ，
直径は，AFとなる。(円周角90°と直径の関係)

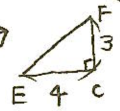


三平方の定理より
AF² = 6² + 1²
AF² = 37
AF = √37 cm

㋒



左図のように
∠FGE = 90°だから
3点F, G, Eを通る円もかけ，直径はEFとなる。



三平方の定理より
EF² = 4² + 3²
EF² = 25
EF = 5cm

㋓ ㋑の円と㋒の円の
直径の比は，相似比と
同じだから，面積比は，
2乗の比となる。
$(\sqrt{37})^2 : 5^2 = 37 : 25$

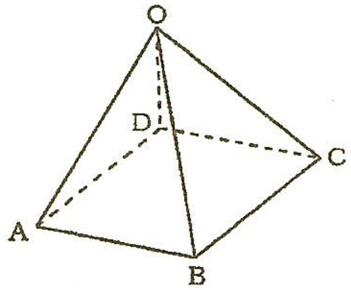
よって $\frac{37}{25}$倍

2A　(3)　図で，立体ＯＡＢＣＤは，正方形ＡＢＣＤを底面とする正四角すいである。

ＯＡ＝９cm，ＡＢ＝６cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

①　正四角すいＯＡＢＣＤの体積は何cm^3か，求めなさい。

②　頂点Ａと平面ＯＢＣとの距離は何cmか，求めなさい。

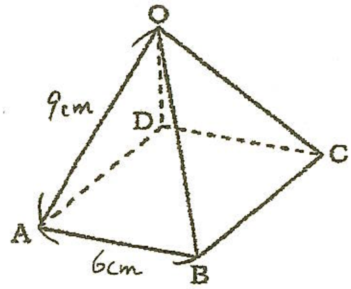


2A (3) 図で，立体ＯＡＢＣＤは，正方形ＡＢＣＤを底面とする正四角すいである。

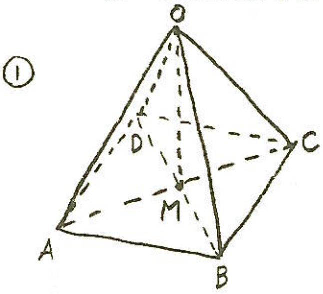
ＯＡ＝９cm，ＡＢ＝６cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

① 正四角すいＯＡＢＣＤの体積は何cm^3か，求めなさい。

② 頂点Ａと平面ＯＢＣとの距離は何cmか，求めなさい。



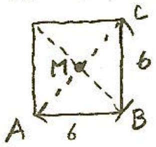
①



頂点Oから底面に垂線をおろすと
底面の正方形の対角線の交点M
を通る。

㋐ AMの長さを求めると

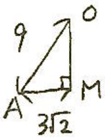
$AC^2 = 6^2 + 6^2$ として
$AC^2 = 72$
$AC = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ と考えてもOK
考えやすい方法で！



△ABCは直角二等辺三角形だから
$1:1:\sqrt{2}$ の比になっていて
1にあたるのが6cmだから
$6:6:6\sqrt{2}$ とわかる。

MはACの中点になるから $AM = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ cm

㋑ 正四角すいの高さを求めると



直角三角形AMOだから
三平方の定理より

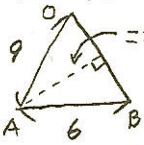
$(3\sqrt{2})^2 = 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$
$= 9 \times 2$
$= 18$

$OM^2 + (3\sqrt{2})^2 = 9^2$
$OM^2 + 18 = 81$
$OM^2 = 63$ ← $81 - 18$
$OM = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$

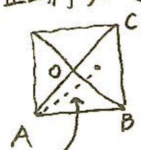
㋒ 体積 = 底面積 × 高さ × $\frac{1}{3}$ だから
$= \underbrace{6 \times 6}_{\text{正方形}} \times 3\sqrt{7} \times \frac{1}{3}$
$= 36\sqrt{7}$

よって $36\sqrt{7}$ cm^2

② 正四角すいを正面から見たとすると



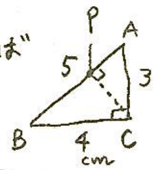
正四角すいを真上から見たとすると



とても、わかりにくい!!

$3:5 = CP:4$
$5CP = 12$
$CP = \frac{12}{5}$

たとえば



の△ABCで、「CとABとのきょりCPは何cmか」という問題は、相似を使っても解けるが次のようにも解ける。

まず△ABCの面積を求める。→ $\frac{4 \times 3}{2} = \underbrace{6}_{ア}$ cm^2

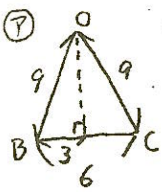
底辺をAB，高さをCPとして面積の式を考えると
$\frac{AB \times CP}{2}$ だから $\underbrace{\frac{5CP}{2}}_{イ}$ cm^2

→ ア＝イより
$\frac{5CP}{2} = 6$
$5CP = 12$
$CP = \frac{12}{5}$ cm

上の ┌┐ と同じように考えると

正四角すいの体積 ＝ $\underbrace{\text{三角すいOABC}}_{\text{正四角すいの半分}} \times 2$
＝ 面OBC × AとOBCのきょり × $\frac{1}{3}$ × 2 と考えられる。

㋐



まず△OBCの面積を求めるために
三平方の定理を使って高さを求めると

$3^2 + 高さ^2 = 9^2$
$高さ^2 = 81 - 9$
$高さ = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$\triangle OBC = \frac{6 \times 6\sqrt{2}}{2}$
$= 18\sqrt{2}$

㋑ 上の式に求められた体積と面積をあてはめると

$36\sqrt{7} = 18\sqrt{2} \times$ 求めたいきょり $\times \frac{1}{3} \times 2$

36で わって

$\sqrt{7} = \sqrt{2} \times$ きょり $\times \frac{1}{3}$

$\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{2}} =$ きょり

$\frac{3\sqrt{7} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} =$ きょり

きょり $= \frac{3\sqrt{14}}{2}$

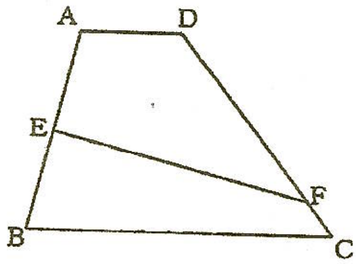
よって $\frac{3\sqrt{14}}{2}$ cm

2B (2) 図で，四角形ＡＢＣＤは，ＡＤ//ＢＣの台形である。Ｅは辺ＡＢの中点，Ｆは辺ＤＣ上の点で，四角形ＡＥＦＤと四角形ＥＢＣＦの周の長さが等しい。

ＡＤ＝２cm，ＢＣ＝６cm，ＤＣ＝５cm，台形ＡＢＣＤの高さが４cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

① 線分ＤＦの長さは何cmか，求めなさい。

② 四角形ＥＢＣＦの面積は何cm²か，求めなさい。

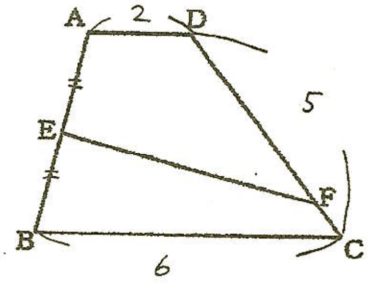


2B (2) 図で，四角形ＡＢＣＤは，ＡＤ//ＢＣの台形である。Ｅは辺ＡＢの中点，Ｆは辺ＤＣ上の点で，四角形ＡＥＦＤと四角形ＥＢＣＦの周の長さが等しい。

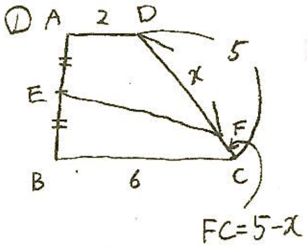
ＡＤ＝２cm，ＢＣ＝６cm，ＤＣ＝５cm，台形ＡＢＣＤの高さが４cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

① 線分ＤＦの長さは何cmか，求めなさい。

② 四角形ＥＢＣＦの面積は何cm²か，求めなさい。



①



DF＝x cmとする

四角形AEFD と 四角形EBCFの周の長さが等しいから

$AE+2+x+EF = EB+6+5-x+EF$

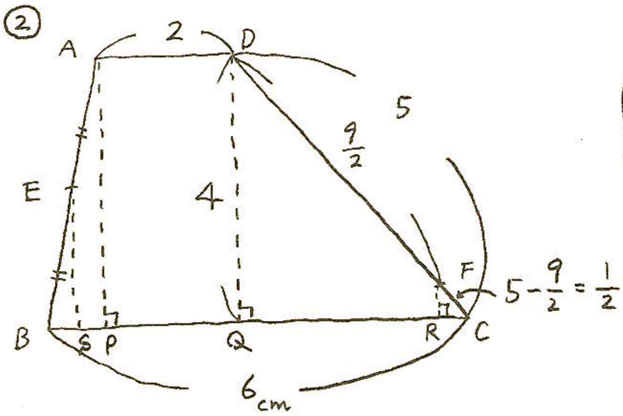
Eは中点で AE＝EBであり EFは共通だから 両辺から、けして

$2+x = 11-x$

$2x = 9$

$x = \frac{9}{2}$ 　よって $\underline{\frac{9}{2}\text{cm}}$

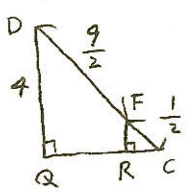
②



$5-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}$

上図のように A,D,F,EからBCに垂線をおろして AP，DQ，FR，ESとする。

㋐ FRを求めると



FR//DQより

FR：DQ＝CF：CDだから

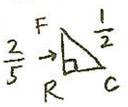
$FR : 4 = \frac{1}{2} : \frac{10}{2}$

$\quad\quad 1 : 10$

$10FR = 4$

$FR = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

㋑ RCを求めると



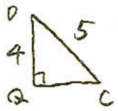
$RC^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$RC^2 = \frac{1}{4}-\frac{4}{25}$

$RC^2 = \frac{9}{100} \leftarrow \frac{25}{100}-\frac{16}{100}$

$RC = \frac{3}{10}$

㋒ QCを求めると



△DQCは 3：4：5の比をもつ直角三角形だから QC＝3cm

㋓ 左図のように長方形APQDとなるから

AD＝PQ＝2cm

㋔ 直角三角形ABPに目をつけると

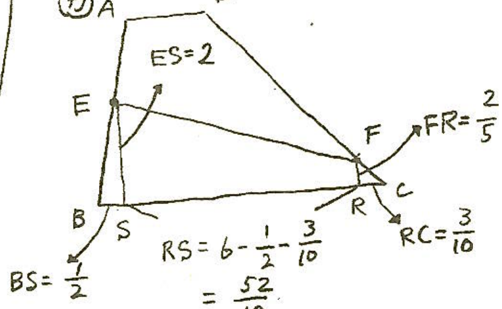
ES//APだから中点連結定理より

$ES = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}\times 4 = 2\text{cm}$

$BS = \frac{1}{2}BP = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}\text{cm}$

$\quad\quad\quad 6-2-3$

㋕



$RS = 6-\frac{1}{2}-\frac{3}{10}$

$= \frac{52}{10}$

四角形EBCF

＝△EBS＋台形ESRF＋△FRC

$= \frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}+2\right)\times\frac{52}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}+\frac{12}{5}\times\frac{13}{5}+\frac{3}{50}$

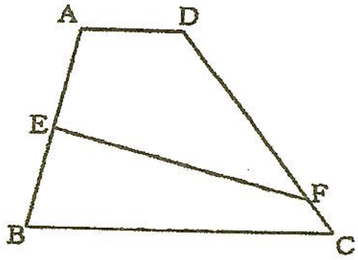
$= \frac{25}{50}+\frac{312}{50}+\frac{3}{50} = \frac{340}{50} = \frac{34}{5}$ 　よって $\underline{\frac{34}{5}\text{cm}^2}$

2B (2) 図で，四角形ABCDは，AD//BCの台形である。Eは辺ABの中点，Fは辺DC上の点で，四角形AEFDと四角形EBCFの周の長さが等しい。

AD＝2㎝，BC＝6㎝，DC＝5㎝，台形ABCDの高さが4㎝のとき，次の①，②の問いに答えなさい。

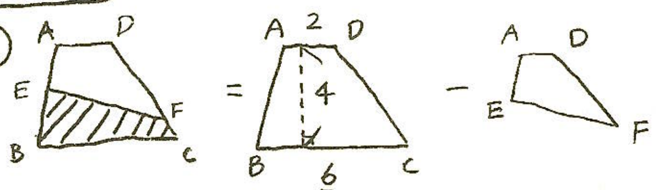
① 線分DFの長さは何㎝か，求めなさい。

② 四角形EBCFの面積は何㎝²か，求めなさい。



別の考え方

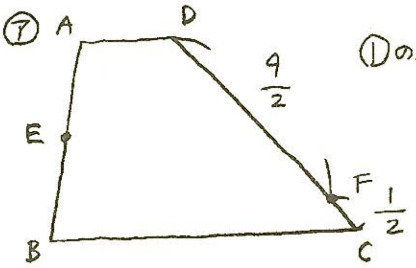
②



として考える。

$$\frac{(2+6)\times 4}{2}=16\,\text{cm}^2$$

㋐



①の答えより $DF=\frac{9}{2}$cm

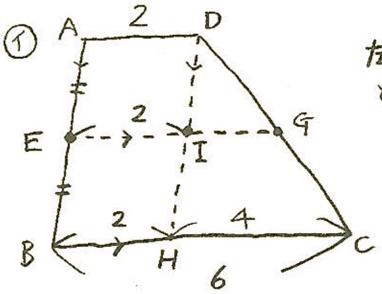
$FC=5-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}$cm

がわかるから

$DF:FC=\frac{9}{2}:\frac{1}{2}$

$=9:1$ となる。

㋑



左図のように EG//BC, AB//DH となる点G, H, Iをとると

▱ABHDだから $AD=BH=2$

▱AEID　$AD=EI=2$

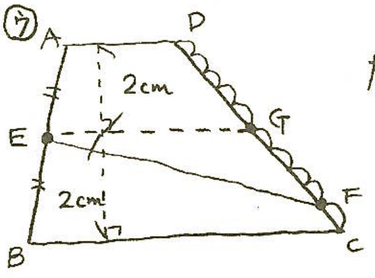
△DHCで $HC=\underset{6}{BC}-\underset{2}{BH}=4$

中点連結定理より

$IG=\frac{1}{2}HC=\frac{1}{2}\times 4=2$cm

よって $EG=\underset{2}{EI}+\underset{2}{IG}=4$cm

㋒



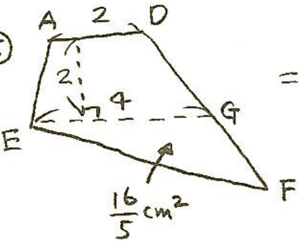
左図のように DF:FC=9:1 ということは DCはFCの10倍で、GがDCの中点、だから GFはFCの4倍となる。

△EGFは、底辺EG=4cm

高さが $2\text{cm}\times\frac{4}{5}$ と考えられるので

面積は $4\times\frac{8}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{16}{5}\text{cm}^2$

㋓



= 台形AEGD + △EGF

$$=\frac{(2+6)\times 2}{2}+\frac{16}{5}=8+\frac{16}{5}=\frac{56}{5}$$

㋔ よって求めたい四角形EBCF

= 台形ABCD − 四角形AEFD

$=16-\frac{56}{5}$

$=\frac{80}{5}-\frac{56}{5}$

$=\frac{24}{5}$

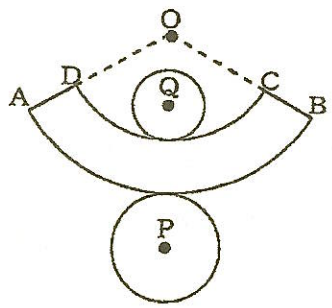
$\frac{24}{5}\text{cm}^2$

2B (3)　図は，ある立体の展開図である。弧ＡＢ，ＤＣはともに点Ｏを中心とする円周の一部で，直線ＤＡ，ＣＢは点Ｏを通っている。また，円Ｐ，Ｑはそれぞれ弧ＡＢ，ＤＣに接している。

ＤＡ＝ＣＢ＝３cm，弧ＡＢ，ＤＣの長さがそれぞれ６πcm，４πcmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

①　円Ｐの面積と円Ｑの面積の和は何cm²か，求めなさい。

②　展開図を組み立ててできる立体の体積は何cm³か，求めなさい。

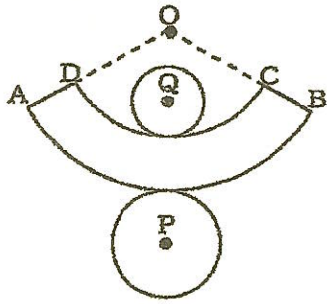


2B (3) 図は，ある立体の展開図である。弧AB，DCはともに点Oを中心とする円周の一部で，直線DA，CBは点Oを通っている。また，円P，Qはそれぞれ弧AB，DCに接している。

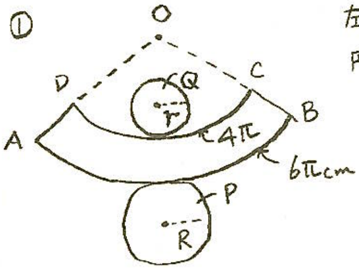
DA＝CB＝3 cm，弧AB，DCの長さがそれぞれ6 π cm，4 π cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

① 円Pの面積と円Qの面積の和は何cm²か，求めなさい。

② 展開図を組み立ててできる立体の体積は何cm³か，求めなさい。



①



左図のように円Qの半径を r cm

円Pの半径を R cm とすると

円Qの円周は $2\pi r$ と表され，$\overset{\frown}{DC}$と等しいから $2\pi r = 4\pi$ より $r = 2$ cm

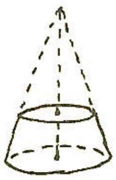
円Pの円周は $2\pi R$ と表され $\overset{\frown}{AB}$ と等しいから $2\pi R = 6\pi$ より $R = 3$ cm

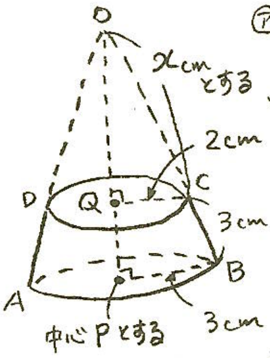
よって 円Pと円Qの面積の和は、

$\pi r^2 + \pi R^2 = \pi \times 4 + \pi \times 9 = 13\pi$　　13π cm²

② 展開図を組み立てると下のような立体(円すい台)になる。

求めたい円すい台は、もとの円すいから、上の小さな円すいをひけばいい。
(底面の半径3cm)　(底面の半径2cm)





㋐ 左図の直角三角形OQC，OPBで

QC∥PB だから

OC : OB = 2cm : 3cm

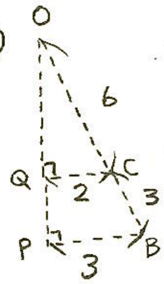
$x : x+3 = 2 : 3$

$3x = 2(x+3)$

$3x = 2x + 6$

$x = 6$

OC = 6 cm とわかる。



㋑ △OQCで 三平方の定理より

$OQ^2 + 2^2 = 6^2$

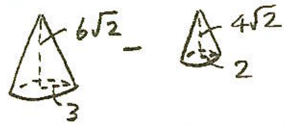
$OQ^2 = 32$

$OQ = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

OQ : OP = 2 : 3 だから

$OP = \frac{3}{2}OQ = \frac{3}{2} \times 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

㋒ 求めたい円すい台 =



$= \pi \times 3^2 \times 6\sqrt{2} \times \frac{1}{3} - \pi \times 2^2 \times 4\sqrt{2} \times \frac{1}{3}$

$= 18\sqrt{2}\pi - \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi = \frac{54\sqrt{2}}{3}\pi - \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi = \frac{38\sqrt{2}}{3}\pi$　　$\frac{38\sqrt{2}}{3}\pi$ cm³

別の考え方

と

の相似比は

3 : 2 だから

体積比は $3^3 : 2^3$

$= 27 : 8$

27−8

ということは

が

の $\frac{19}{27}$ となる。

よって

$= \frac{\pi \times 3^2 \times 6\sqrt{2}}{3} \times \frac{19}{27}$

$= \frac{\pi \times 9 \times 6\sqrt{2}}{3} \times \frac{19}{27}$

$= \frac{38\sqrt{2}}{3}\pi$

となる。

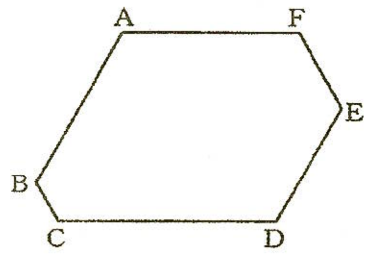
よって

31 A (2)　図で，六角形ＡＢＣＤＥＦは内角の大きさがすべて等しい。

ＡＢ＝ＡＦ＝４cm，ＥＤ＝３cm，ＦＥ＝２cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

① 辺ＣＤの長さは何cmか，求めなさい。

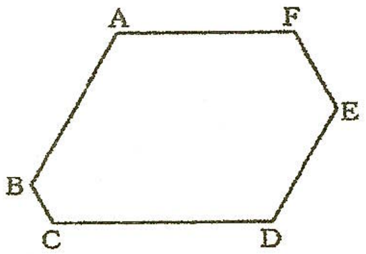
② 六角形ＡＢＣＤＥＦの面積は何cm²か，求めなさい。



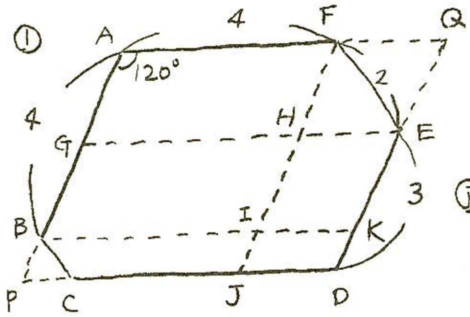
31 A (2) 図で，六角形ＡＢＣＤＥＦは内角の大きさがすべて等しい。
ＡＢ＝ＡＦ＝４㎝，ＥＤ＝３㎝，ＦＥ＝２㎝のとき，次の①，②の問いに答えなさい。

① 辺ＣＤの長さは何cmか，求めなさい。

② 六角形ＡＢＣＤＥＦの面積は何cm²か，求めなさい。



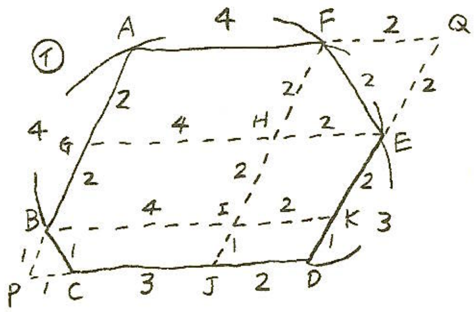
①



左の六角形ABCDEFの内角がすべて等しいということは、1つの外角が $360° \div 6 = 60°$ だから、内角は120°になる。

㋐ 図のように平行線や延長線をひくと内角が120°で錯角・同位角を考えると正三角形やひし形、平行四辺形がいくつかできる。

㋑

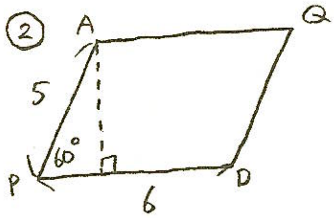


△BPC，△FHE，△FEQは正三角形で いくつかの平行四辺形に目をつけ、辺の長さを考えると、左図のようになる

よって $CD = CJ + JD$
$= 3 + 2$
$= 5$

5cm

②



㋐ 左図のように□APDQの高さをふくむ直角三角形を考えると、$1:\sqrt{3}:2$ の比をもつ三角形で、AP=5cm だから

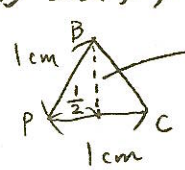
AP : 高さ = $2:\sqrt{3}$
5cm

2×高さ = $5\sqrt{3}$
高さ = $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm とわかる。

㋑ 求めたい六角形 ABCDEF = □APDQ − 正三角形BPC − 正三角形FEQ

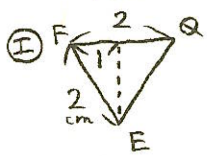
$6 \times \frac{5\sqrt{3}}{2}$

㋒ 正三角形BPCは $1:\sqrt{3}:2$ の比だから



高さは $\frac{1}{2}$ cm × $\sqrt{3}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm で
面積 = $1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ cm²

㋓



正三角形FEQは△BPCと相似で
相似比が 2:1 だから
面積比は 4:1 となり、面積は $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$ cm²

㋔ 六角形ABCDEF
= □APDQ − △BPC − △FEQ
$= 15\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3}$
$= \frac{60\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{4\sqrt{3}}{4}$
$= \frac{55\sqrt{3}}{4}$

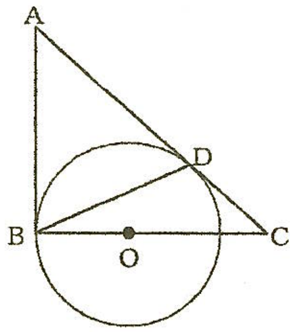
よって $\frac{55\sqrt{3}}{4}$ cm²

31A (3)　図で，円Ｏは中心が△ＡＢＣの辺ＢＣ上にあり，直線ＡＢ，ＡＣとそれぞれ点Ｂ，Ｄで接している。

ＡＢ＝２cm，ＡＣ＝３cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

①　円Ｏの面積は何cm^2か，求めなさい。

②　△ＤＢＣを辺ＢＣを回転の軸として１回転させてできる立体の体積は，円Ｏを辺ＢＣを回転の軸として１回転させてできる立体の体積の何倍か，求めなさい。



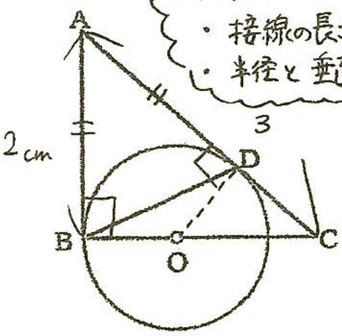
31A (3) 図で，円Oは中心が△ABCの辺BC上にあり，直線AB，ACとそれぞれ点B，Dで接している。

AB＝2㎝，AC＝3㎝のとき，次の①，②の問いに答えなさい。

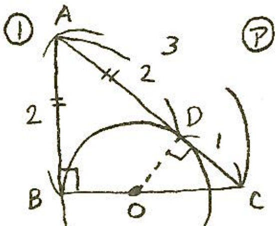
① 円Oの面積は何㎝²か，求めなさい。

② △DBCを辺BCを回転の軸として1回転させてできる立体の体積は，円Oを辺BCを回転の軸として1回転させてできる立体の体積の何倍か，求めなさい。

接線のポイント
・接線の長さは等しい
・半径と垂直



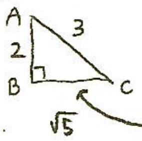
①



ア 半径ODをひくと
$\angle ABC=\angle ODC=90^\circ$
∠Cは共通だから
△ABC∽△ODC

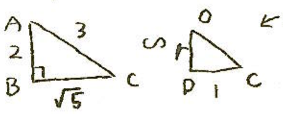
イ AB＝AD＝2だから
$DC=\underset{3}{AC}-\underset{2}{AD}=1$

ウ △ABCで三平方の定理より



$BC^2+2^2=3^2$
$BC^2=5 \leftarrow 9-4$
$BC=\sqrt{5}\,cm$

エ △ABC∽△ODCより



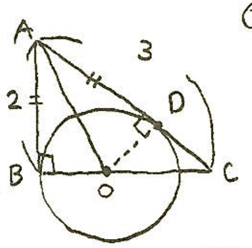
←ODは半径だから rとする

$2:r=\sqrt{5}:1$
$\sqrt{5}r=2$
$r=\frac{2\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

オ 円の面積は
$\pi r^2=\pi\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$
$=\pi\times\frac{4\times5}{25_5}$
$=\frac{4}{5}\pi$

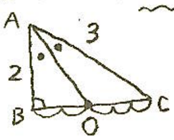
よって $\frac{4}{5}\pi\ cm^2$

① 別の考え方



ア △ABOと△ADOで
AB=AD, BO=DO, AO=AOだから
合同となり，∠BAO＝∠DAO
↓
角の二等分線だから

イ

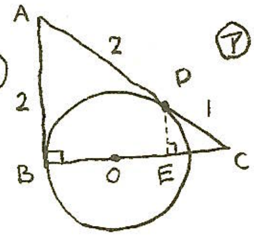


AB:AC=BO:CO
$=2:3$

ウ △ABCで三平方の定理より
$BC=\sqrt{5}\ cm$ とわかるから
半径$BO=\sqrt{5}\times\frac{2}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

エ よって円の面積は
$\pi\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\pi\times\frac{4\times5}{25_5}$
$=\frac{4}{5}\pi$

②

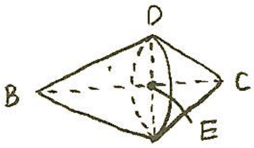


ア 接点DからBCに垂線をひきDEとする。
AB∥DEだから
$\underset{1}{CD}:\underset{3}{CA}=DE:\underset{2cm}{AB}$ より
$3DE=2$
$DE=\frac{2}{3}cm$

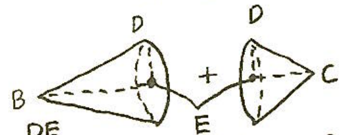
$BC^2+2^2=3^2$ より

また $\underset{1}{CD}:\underset{2}{DA}=CE:EB$
$EB=2CE$で，$BC=\sqrt{5}\,cm$ だったから
$EB=\frac{2}{3}BC=\frac{2\sqrt{5}}{3}\,cm$
$EC=\frac{1}{3}BC=\frac{\sqrt{5}}{3}\,cm$ とわかる。

イ △DBCをBCを軸に回転した立体は、



のような立体だから



$\overset{DE}{\pi\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}}\times\underset{BE}{\frac{2\sqrt{5}}{3}}\times\frac{1}{3}+\pi\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\overset{EC}{\frac{\sqrt{5}}{3}}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{8\sqrt{5}}{81}\pi+\frac{4\sqrt{5}}{81}\pi=\frac{4\times3\sqrt{5}}{81_{27}}\pi=\frac{4\sqrt{5}}{27}\pi$

ウ 円OをBCを軸に回転した立体は、
半径 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cmの球だから
①のエで求めた
$\frac{4}{3}\pi\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{32\sqrt{5}}{75}\pi$

エ $\frac{4\sqrt{5}}{27}\pi\ cm^3$ は，$\frac{32\sqrt{5}}{75}\pi\ cm^3$ の何倍か
ということだから，(たとえば 6は2の何倍かなら 6÷2＝3倍)

$\frac{4\sqrt{5}\pi}{27}\div\frac{32\sqrt{5}\pi}{75}=\frac{4\sqrt{5}\pi\times75^{25}}{27_{9}\times32\sqrt{5}\pi_{8}}$
$=\frac{25}{72}$

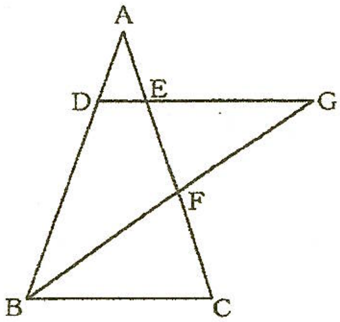
よって $\frac{25}{72}$倍

31B (2) 図で，△ＡＢＣはＡＢ＝ＡＣの二等辺三角形であり，Ｄ，Ｅはそれぞれ辺ＡＢ，ＡＣ上の点で，ＤＥ//ＢＣである。また，Ｆ，Ｇはそれぞれ∠ＡＢＣの二等分線と辺ＡＣ，直線ＤＥとの交点である。

ＡＢ＝12 cm，ＢＣ＝８cm，ＤＥ＝２cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

① 線分ＤＧの長さは何cmか，求めなさい。

② △ＦＢＣの面積は△ＡＤＥの面積の何倍か，求めなさい。

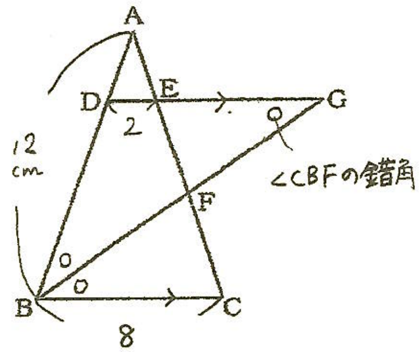


31B (2) 図で，△ABCはAB＝ACの二等辺三角形であり，D，Eはそれぞれ辺AB，AC上の点で，DE//BCである。また，F，Gはそれぞれ∠ABCの二等分線と辺AC，直線DEとの交点である。

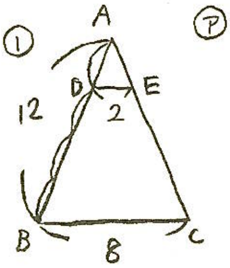
AB＝12 cm，BC＝8 cm，DE＝2 cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

① 線分DGの長さは何cmか，求めなさい。

② △FBCの面積は△ADEの面積の何倍か，求めなさい。



①



㋐ DE//BCだから

AD : AB = DE : BC

2 : 8 ÷2

1 : 4

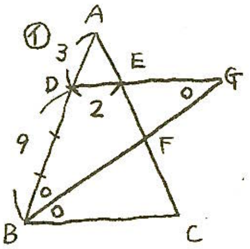
AB＝4ADということは、左図のように

$AD=\frac{1}{4}AB=\frac{1}{4}\times12=3$cm

$DB=12-3=9$cm とわかる。

（または $\frac{3}{4}\times12$）

㋑



BGは∠ABCの二等分線で

DG//BCより錯角は等しいから

∠DBG＝∠CBG＝∠DGB

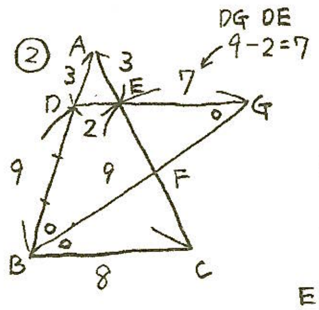
（○印）

よって△DBGは、底角が等しく

二等辺三角形になる。

DG＝DB＝9cm　　9cm

②



㋐ 左図のように

EG＝9−2＝7cm

㋑ △FBC∽△FGEで

BC：GE＝CF：EFだから

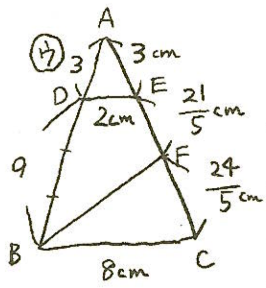
8cm　7cm

$EF=EC\times\frac{7}{15}=9\times\frac{7}{15}=\frac{21}{5}$cm

$FC=EC\times\frac{8}{15}=9\times\frac{8}{15}=\frac{24}{5}$cm

とわかる。

㋒



AE：EF：FC

$=3:\frac{21}{5}:\frac{24}{5}$

$=\frac{15}{5}:\frac{21}{5}:\frac{24}{5}$

＝15：21：24 ÷3

＝5：7：8 とわかる。

面積を比較するだけだから、ここがポイント！

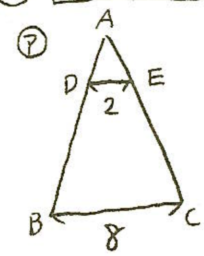
㋓ 実際の高さではないけれど

△ADEと△FBCの高さの比を5：8と考えることができるので

$\triangle ADE=\frac{2\text{cm}\times5}{2}=5$　$\triangle FBC=\frac{8\text{cm}\times8}{2}=32$ より、△FBC（32）は△ADE（5）の $32\div5=\frac{32}{5}$　　$\frac{32}{5}$倍

② 別の考え方

㋐



△ADE∽△ABCで

DE：BC＝1：4だから

2cm　8cm

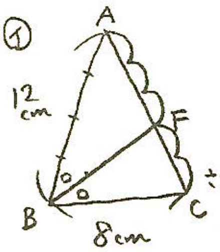
相似比＝1：4

そうすると 面積比＝$1^2:4^2$

＝1：16

ということは、$\triangle ADE=\triangle ABC\times\frac{1}{16}$

㋑

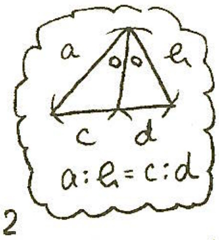


三角形ABCでBFが角の二等分線だから

BA：BC＝AF：CF＝3：2

÷4 12：8

3：2



㋒ △ABCと△FBCの

面積を比べると、

底辺の比がAC：FCで5：2

高さが共通の三角形と考えることができるので

$\triangle FBC=\triangle ABC\times\frac{2}{5}$

㋓ △FBCは△ADEの $\frac{2}{5}\div\frac{1}{16}$ で

$(\frac{2}{5})$　$(\frac{1}{16})$

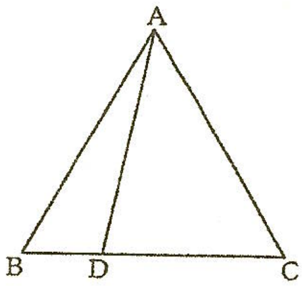
$\frac{2}{5}\times\frac{16}{1}=\frac{32}{5}$倍

31B (3) 図で，△ＡＢＣは正三角形であり，Ｄは辺ＢＣ上の点で，
ＢＤ：ＤＣ＝１：２である。

ＡＢ＝６cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

① 線分ＡＤの長さは何cmか，求めなさい。

② 線分ＡＤを折り目として平面ＡＢＤと平面ＡＤＣが垂直となるように折り曲げたとき，点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄを頂点としてできる立体の体積は何cm³か，求めなさい。

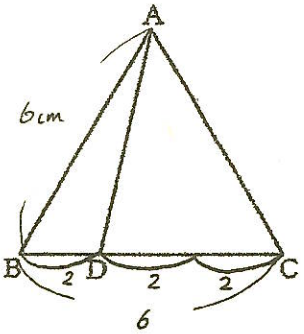


31B (3) 図で，△ＡＢＣは正三角形であり，Ｄは辺ＢＣ上の点で，ＢＤ：ＤＣ＝１：２である。

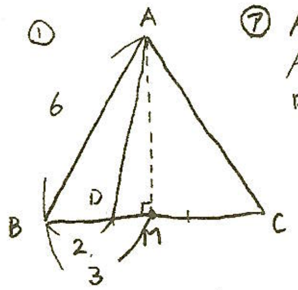
ＡＢ＝６cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

① 線分ＡＤの長さは何cmか，求めなさい。

② 線分ＡＤを折り目として平面ＡＢＤと平面ＡＤＣが垂直となるように折り曲げたとき，点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄを頂点としてできる立体の体積は何cm³か，求めなさい。



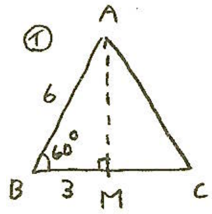
①



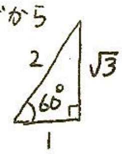
㋐ AからBCに垂線をひき、AMとすると、MはBCの中点になる。

DM = 3 − 2 = 1 cm

㋑



△ABMは60°の角をもつ直角三角形だから

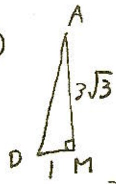


1:√3:2 の比を考えると

AM = BM×√3 だから

AM = 3√3 cm とわかる。

㋒



△ADMで三平方の定理より

$1^2+(3\sqrt{3})^2 = AD^2$

$1 + 27 = AD^2$

$3\sqrt{3}\times3\sqrt{3}=9\times3$

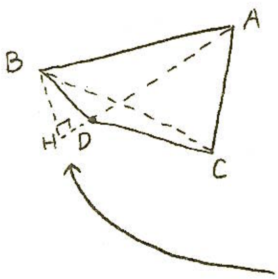
$28 = AD^2$

$AD = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

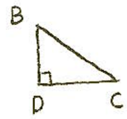
$$\begin{array}{r|l} 2 & 28 \\ 2 & 14 \\ & 7 \end{array}$$

よって $2\sqrt{7}$ cm

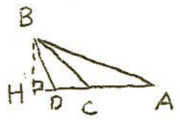
② $\boxed{\text{△ADCを底面とすると}}$



㋐ 水平なところにおき、△BDCの方から見ると

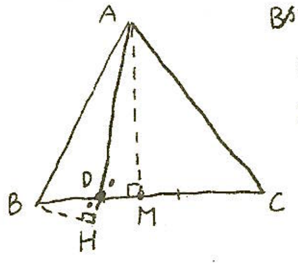


と見えるけれど、△BDCは、ななめ前に傾むいている。



A, C, D が見える方から見ると左のように見える。このときBから垂線をおろしてBHとすると、BHが三角すいBDCAの高さとなる。

㋑ ㋐のBHを、もとの△ABCと同じ平面に表すと、下図のようにADの延長線上へBから垂線をひきBHとすればいい。

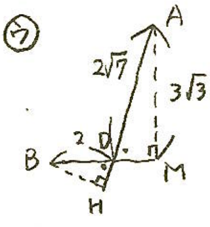


このとき ∠BDH=∠ADM (•印)

∠BHD=∠AMD=90° だから

△BHD∽△AMDとなる。

㋒



相似な三角形で比例式をつくると

AD : BD = AM : BH

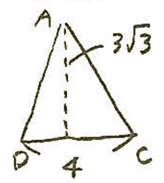
2√7   2   3√3

$2\sqrt{7}\,BH = 6\sqrt{3}$

$BH = \dfrac{\overset{3}{\cancel{6}}\sqrt{3}\times\sqrt{7}}{\cancel{2}\sqrt{7}\times\sqrt{7}}$

$= \dfrac{3\sqrt{21}}{7}$

㋓ 四角すいBDCAの底面ADCの面積は



$\dfrac{4\times3\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm²

㋔ 四角すいBDCAの体積は

△ADC × BH × $\frac{1}{3}$

$= 6\sqrt{3}\times\dfrac{\cancel{3}\sqrt{21}}{7}\times\dfrac{1}{\cancel{3}}$

$= \dfrac{6\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{7}}{7}$

$= \dfrac{6\times3\sqrt{7}}{7}$

$= \dfrac{18\sqrt{7}}{7}$

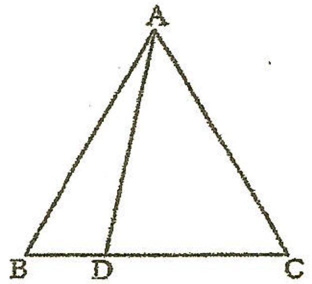
よって $\dfrac{18\sqrt{7}}{7}$ cm³

31B (3) 図で，△ＡＢＣは正三角形であり，Ｄは辺ＢＣ上の点で，ＢＤ：ＤＣ＝１：２である。

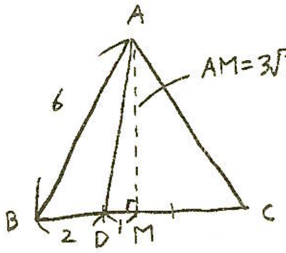
ＡＢ＝６cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

① 線分ＡＤの長さは何cmか，求めなさい。

② 線分ＡＤを折り目として平面ＡＢＤと平面ＡＤＣが垂直となるように折り曲げたとき，点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄを頂点としてできる立体の体積は何cm³か，求めなさい。



①



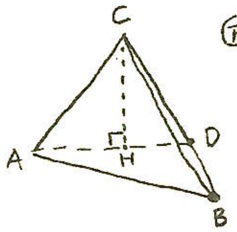
$AM = 3\sqrt{3}$ cm

$AD = 2\sqrt{7}$ cm

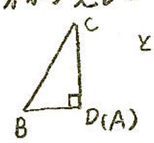
とわかった。

別の考え方

② $\boxed{\triangle ABD を底面とすると}$

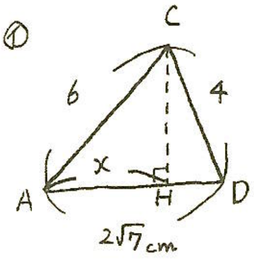


㋐ 水平なところにおき△CDBの方から見ると



となり、△CADのCからADに垂線をおろしたCHが四角すいCABDの高さとなる。

㋑



教科書の章末問題にある考え方

△CAHで $CH^2 + AH^2 = CA^2$

$\boxed{CH^2} = CA^2 - AH^2$

△CDHで $CH^2 + HD^2 = CD^2$

$\boxed{CH^2} = CD^2 - HD^2$

よって $CA^2 - AH^2 = CD^2 - HD^2$

上図で $AH = x$ cm とすると $HD = 2\sqrt{7} - x$ (cm) と表せるから

$6^2 - x^2 = 4^2 - (2\sqrt{7} - x)^2$

$36 - x^2 = 16 - (28 - 4\sqrt{7}x + x^2)$

$36 - \cancel{x^2} = 16 - 28 + 4\sqrt{7}x - \cancel{x^2}$

$36 + 12 = 4\sqrt{7}x$

$4\sqrt{7}x = 48$

$x = \dfrac{\overset{12}{\cancel{48}} \times \sqrt{7}}{\cancel{4}\sqrt{7} \times \sqrt{7}}$

$= \dfrac{12\sqrt{7}}{7}$ cm

㋒ △CAHで CHを求めると

$\left(\dfrac{12\sqrt{7}}{7}\right)^2 + CH^2 = 6^2$

$CH^2 = 36 - \dfrac{144 \times \cancel{7}}{\cancel{49}\,7}$

$\left(\dfrac{12\sqrt{7}}{7} \times \dfrac{12\sqrt{7}}{7} = \dfrac{144 \times 7}{49}\right)$

$CH^2 = \dfrac{252}{7} - \dfrac{144}{7}$

$= \dfrac{108}{7}$

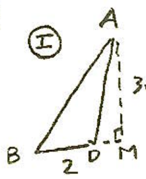
$CH = \sqrt{\dfrac{108}{7}}$

$= \dfrac{\sqrt{108}}{\sqrt{7}} = \dfrac{6\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}}$

$= \dfrac{6\sqrt{21}}{7}$ cm

$\begin{array}{r|l} 2 & 108 \\ 2 & 54 \\ 3 & 27 \\ 3 & 9 \\ & 3 \end{array}$

㋓



$= \dfrac{2 \times 3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

㋔ 四角すいCABD

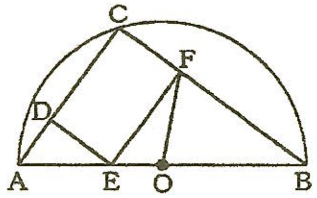
$= \triangle ABD \times CH \times \dfrac{1}{3}$

$= \cancel{3}\sqrt{3} \times \dfrac{6\sqrt{21}}{7} \times \dfrac{1}{\cancel{3}}$

$= \dfrac{6\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{7}}{7}$

$= \dfrac{6 \times 3\sqrt{7}}{7} = \dfrac{18\sqrt{7}}{7}$ cm³

30A　(2)　図で，ＣはＡＢを直径とする半円Ｏの周上の点，Ｄ，Ｅ，Ｆはそれぞれ線分ＣＡ，ＡＢ，ＣＢ上の点で，四角形ＣＤＥＦは長方形である。



ＣＡ＝６cm，ＣＢ＝８cm，ＣＤ：ＤＥ＝３：２のとき，次の①，②の問いに答えなさい。

①　線分ＦＥの長さは何cmか，求めなさい。

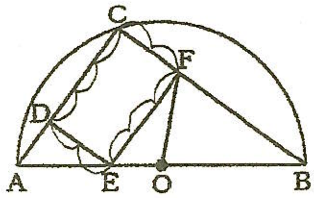
②　△ＦＥＯの面積は△ＡＢＣの面積の何倍か，求めなさい。

30A　(2)　図で，ＣはＡＢを直径とする半円Ｏの周上の点，Ｄ，Ｅ，Ｆはそれぞれ線分ＣＡ，ＡＢ，ＣＢ上の点で，四角形ＣＤＥＦは長方形である。

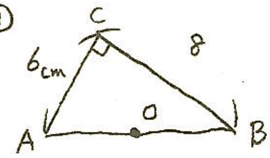
ＣＡ＝６cm，ＣＢ＝８cm，ＣＤ：ＤＥ＝３：２のとき，次の①，②の問いに答えなさい。

① 線分ＦＥの長さは何cmか，求めなさい。

② △ＦＥＯの面積は△ＡＢＣの面積の何倍か，求めなさい。

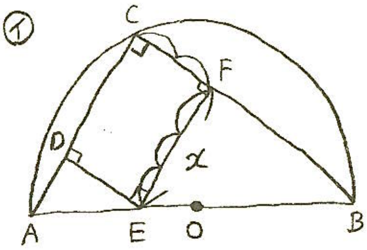


①



㋐ △CABは CA：CB＝3：4
6cm　8cm
となり、3：4：5の辺の比をもつ直角三角形だから、AB＝5×2＝10cm
($AB^2=6^2+8^2$ からも AB＝10となる) とわかる。

㋑

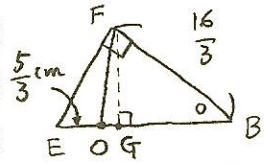


左図で90°の角と∠Aや∠Bが共通であることを考えると、
△ABC∽△EBF∽△AED
となる。

㋒ FE＝x cmとすると
長方形CDEFで EF：CF＝3：2より $CF=EF\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}x$
△EBFで3：4：5の比だから $FB=EF\times\frac{4}{3}=\frac{4}{3}x$

㋓ CB＝8cmだから
CF＋FB＝8より　$\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}x=8$
$\frac{6}{3}x=8$
$2x=8$
$x=4$
よって FE＝4cm

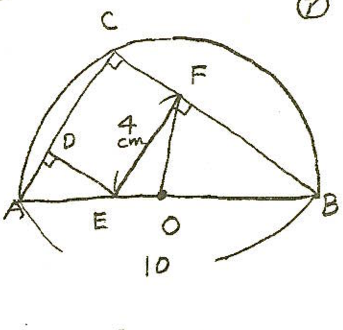
②で $\boxed{\text{△FEOの別の考え方}}$



FからEBに垂線をひきFGとすると

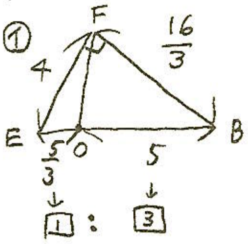
△EBF∽△FBGとなり
△FBGも 3：4：5の比があるから
$FG=FB\times\frac{3}{5}=\frac{16}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{16}{5}$ cm
よって△FEOは、底辺 $EO=\frac{5}{3}$ cm
高さ $EG=\frac{16}{5}$ cm で
面積 $=\frac{5}{3}\times\frac{16}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{8}{3}$ cm²

②



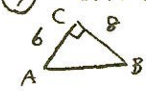
㋐ AB＝10cmでOは中心だからOB＝5cm
△EBFでFE＝4cmになったから
$FB=\frac{4}{3}\times4=\frac{16}{3}$ cm
また△EBFで3：4：5の比より
$EB=FE\times\frac{5}{3}=4\times\frac{5}{3}=\frac{20}{3}$ cm
よって $EO=\frac{20}{3}-5=\frac{5}{3}$ cm

㋑



$EO:OB=\frac{5}{3}:5=\frac{5}{3}:\frac{15}{3}=5:15$ より 1：3
$△EOF=△EBF\times\frac{1}{4}$ (底辺の比が1：4)
$=4\times\frac{16}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{8}{3}$ cm²

㋒ $△ABC=\frac{6\times8}{2}=24$ cm² だから



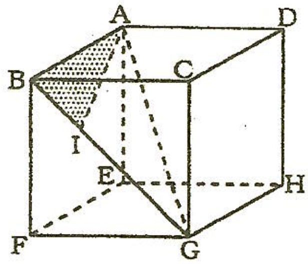
△FEOは△ABCの何倍かというと
△FEO÷△ABC
$=\frac{8}{3}\div24$
$=\frac{8}{3}\times\frac{1}{24}$
$=\frac{1}{9}$　よって $\frac{1}{9}$ 倍

30A (3) 図で，立体ＡＢＣＤＥＦＧＨは立方体である。Ｉは線分ＢＧ上の点で，ＢＩ：ＩＧ＝１：２である。

ＡＢ＝３cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

① 線分ＡＩの長さは何cmか，求めなさい。

② △ＡＢＩを，直線ＡＧを回転の軸として１回転させてできる立体の体積は何cm³か，求めなさい。

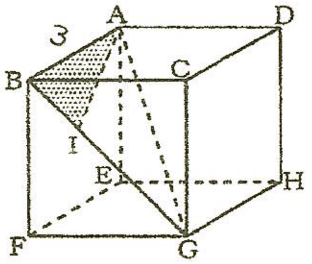


30A (3) 図で，立体ABCDEFGHは立方体である。Iは線分BG上の点で，BI：IG＝1：2である。

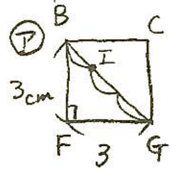
AB＝3cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

① 線分AIの長さは何cmか，求めなさい。

② △ABIを，直線AGを回転の軸として1回転させてできる立体の体積は何cm³か，求めなさい。



① ㋐



1辺3cmの正方形の対角線BGを求めると、△BFGは直角二等辺三角形で、1:1:$\sqrt{2}$の比を考えると、

$BG = FG \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ cmとなる。

BI：IG＝1：2より

$BI = BG \times \frac{1}{3} = 3\sqrt{2} \times \frac{1}{3} = \sqrt{2}$cm

とわかる。

㋑ △ABIは∠ABI＝90°だから

$3^2 + \sqrt{2}^2 = AI^2$

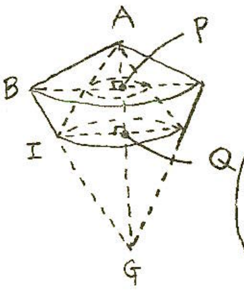
$9 + 2 = AI^2$

$AI^2 = 11$

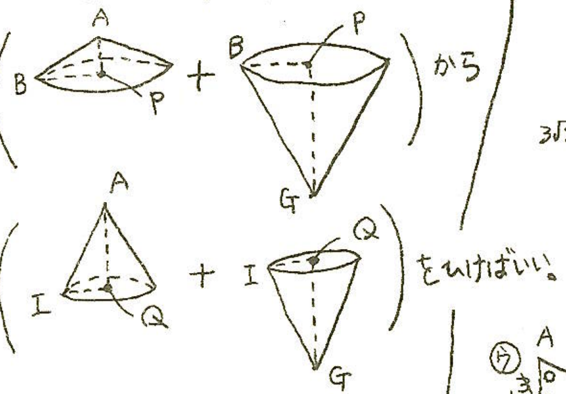
$AI = \sqrt{11}$

よって $\sqrt{11}$ cm

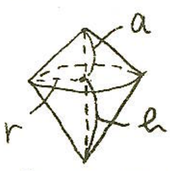
② 求めたい立体は下のような回転体となる。



この体積を求めるには、円すいの体積を4つ考えなければならない。



たとえば

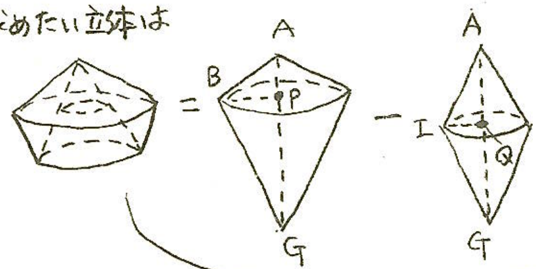


左のような円すいを2つ重ねた立体の体積は、

$\frac{\pi r^2 a}{3} + \frac{\pi r^2 b}{3} = \frac{\pi r^2 (a+b)}{3}$

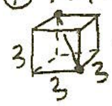
だから

求めたい立体は



で求まる。

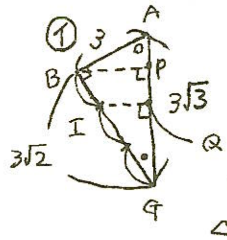
㋐ AGは、立方体の対角線だから



$AG^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 = 27$

$AG = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ cm

㋑



△ABGで、B,IからAGに垂線をひくとBP，IQとなる。

すると

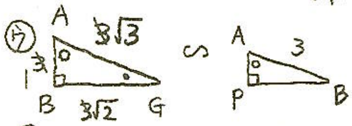
△ABP∽△AGB

(90°と○EP)

△GIQ∽△GAB

(90°と●EP)となる。

㋒



より

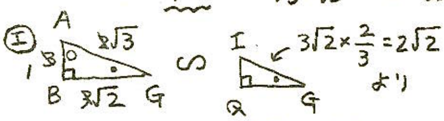
3でわって 1：$\sqrt{2}$：$\sqrt{3}$の比になる。

$\sqrt{3} : 3 = \sqrt{2} : PB$ だから

$\sqrt{3}PB = 3\sqrt{2}$

$PB = \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}$

㋓



$3\sqrt{2} \times \frac{2}{3} = 2\sqrt{2}$

より

$\sqrt{3} : 2\sqrt{2} = 1 : IQ$ だから

$\sqrt{3}IQ = 2\sqrt{2}$

$IQ = \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

㋔

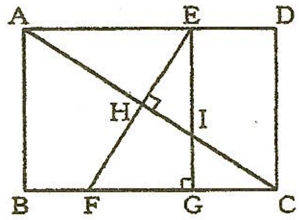
$= \pi \times \underset{BP^2}{\sqrt{6}^2} \times \underset{AG}{3\sqrt{3}} \times \frac{1}{3} - \pi \times \underbrace{\frac{2\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{6}}{3}}_{IQ^2} \times \underset{AG}{3\sqrt{3}} \times \frac{1}{3}$

$= \pi \times 6\sqrt{3} - \pi \times \frac{4 \times \cancel{6}^{2} \times \sqrt{3}}{\cancel{9}_{3}}$

$= \frac{18\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi = \frac{10\sqrt{3}}{3}\pi$

よって $\frac{10\sqrt{3}}{3}\pi$ cm³

30B (2) 図で，四角形ＡＢＣＤは長方形，Ｅは辺ＡＤ上の点，Ｆ，Ｇはともに辺ＢＣ上の点で，ＥＦ⊥ＡＣ，ＥＧ⊥ＢＣである。また，Ｈ，Ｉはそれぞれ線分ＡＣとＥＦ，ＥＧとの交点である。

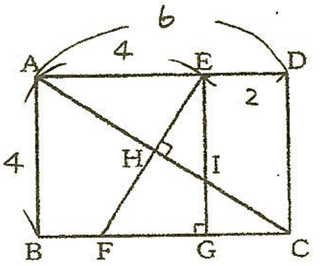


ＡＢ＝４cm，ＡＤ＝６cm，ＡＥ＝４cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

① 線分ＦＧの長さは何cmか，求めなさい。

② 四角形ＨＦＧＩの面積は長方形ＡＢＣＤの面積の何倍か，求めなさい。

30B (2) 図で，四角形ＡＢＣＤは長方形，Ｅは辺ＡＤ上の点，Ｆ，Ｇはともに辺ＢＣ上の点で，ＥＦ⊥ＡＣ，ＥＧ⊥ＢＣである。また，Ｈ，Ｉはそれぞれ線分ＡＣとＥＦ，ＥＧとの交点である。

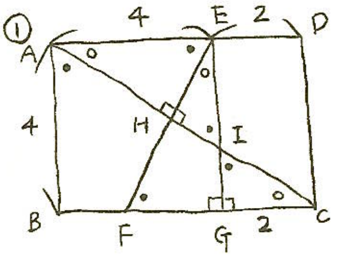


ＡＢ＝４cm，ＡＤ＝６cm，ＡＥ＝４cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

① 線分ＦＧの長さは何cmか，求めなさい。

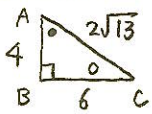
② 四角形ＨＦＧＩの面積は長方形ＡＢＣＤの面積の何倍か，求めなさい。

①

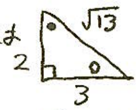


㋐ 対頂角や錯角、内角の和が180°などを考えると、左図のように○印や●印が等しくなり、相似な直角三角形が、たくさんできる。

㋑ △ABCは

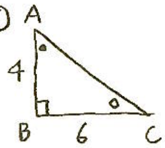


だから、辺の比は



すべて の相似な三角形が $2:3:\sqrt{13}$ となる

㋑



△ABCで三平方の定理より

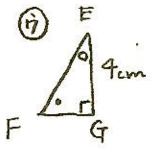
$AC^2 = 4^2 + 6^2 = 52$

$\ 16 \quad 36$

$2)\,52$
$2)\,26$
$\quad\ 13$

$AC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ とわかる。

㋒



△FGEで

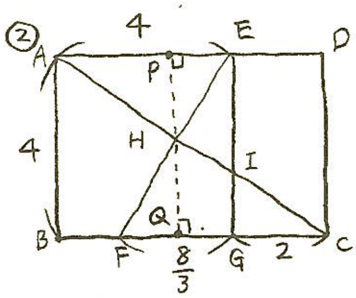
$FG : 2 = 4 : 3$ より

$3FG = 8$

$FG = \frac{8}{3}$

$\frac{8}{3}$ cm

②



㋐ 左図のようにHを通りAB∥PQとなるBCとの垂線PQをひくと

△HFC∽△HEAで

$HQ : HP = FC : EA$

$= \frac{8}{3} + 2 : 4$

$= \frac{14}{3} : 4$

$= 14 : 12$

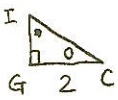
$= 7 : 6$ となるから

$HQ = PQ \times \frac{7}{13}$

$= 4 \times \frac{7}{13} = \frac{28}{13}$ cm

㋑ $\triangle HFC = FC \times HQ \times \frac{1}{2} = \frac{14}{3} \times \frac{28}{13} \times \frac{1}{2} = \frac{196}{39}$ cm²

△IGCで



$IG : 2 = 2 : 3$ より

$3IG = 4$

$IG = \frac{4}{3}$ cm だから

$\triangle IGC = GC \times IG \times \frac{1}{2}$

$= 2 \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$ cm²

㋒ 四角形HFGI ＝ △HFC－△IGC

$= \frac{196}{39} - \frac{4}{3} = \frac{196}{39} - \frac{52}{39} = \frac{\cancel{144}^{48}}{\cancel{39}_{13}} = \frac{48}{13}$

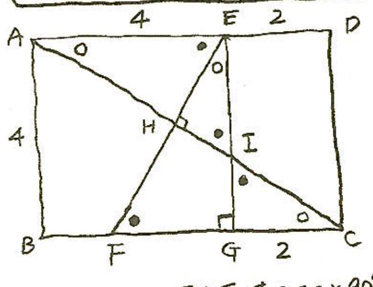
㋓ 四角形HFGIは長方形ABCDの何倍か

というと

$\frac{48}{13} \div 24 = \frac{\cancel{48}^{2}}{13} \times \frac{1}{\cancel{24}} = \frac{2}{13}$

$\frac{2}{13}$ 倍

四角形HFGIの面積の別の考え方



△AEIと△EGFは○印と90°の角があり AE＝EG＝4cm だから合同になる。

△AEH＝△AEI－△EHI

四角形HFGI＝△EGF－△EHIだから

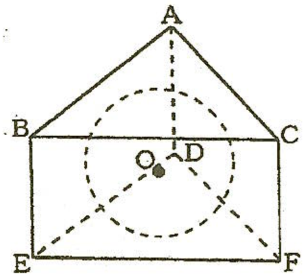
四角形HFGI＝△AEHとわかる。

$\triangle AEH = AE \times PH \times \frac{1}{2}$

$= 4 \times 4 \times \frac{6}{13} \times \frac{1}{2} = \frac{48}{13}$ cm²

30B (3) 図で，A，B，C，D，E，Fを頂点とする立体は底面の△ABC，△DEFが正三角形の正三角柱である。また，球Oは正三角柱ABCDEFにちょうどはいっている。

球Oの半径が2cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。



① 球Oの表面積は何cm^2か，求めなさい。

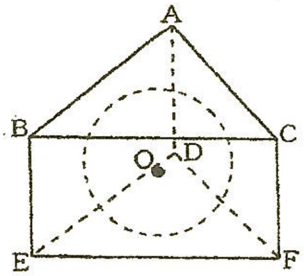
② 正三角柱ABCDEFの体積は何cm^3か，求めなさい。

30B (3) 図で，A，B，C，D，E，Fを頂点とする立体は底面の△ABC，△DEFが正三角形の正三角柱である。また，球Oは正三角柱ABCDEFにちょうどはいっている。

球Oの半径が2cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

① 球Oの表面積は何cm^2か，求めなさい。

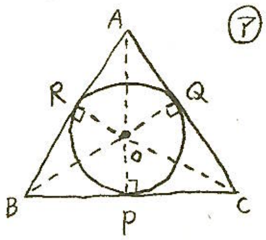
② 正三角柱ABCDEFの体積は何cm^3か，求めなさい。



① 球の表面積の公式は$4\pi r^2$だから

$4\pi \times 2^2 = 16\pi$　よって　$16\pi\ cm^2$

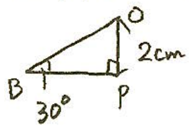
② ま上から見ると



ア 左図のように 正三角形ABCの内側に接する円のように見える。球の半径は、円の半径と等しいから $OP = OQ = OR = 2cm$

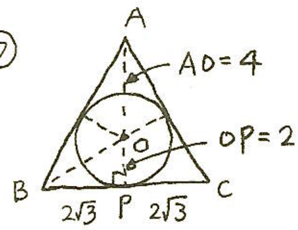
イ $\angle ABC = 60°$で、BOは$\angle ABC$の二等分線になるから

△BPOは $1:\sqrt{3}:2$の比がある三角形である。



$BP = OP \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}\ cm$

$OB = OP \times 2 = 4\ cm$ とわかる。



ウ 左図のように △ABCは

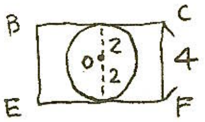
底辺 $BC = 4\sqrt{3}\ cm$

高さ $AP = 6cm$ だから

$\triangle ABC = \dfrac{4\sqrt{3} \times 6}{2} = 12\sqrt{3}\ cm^2$

エ 三角柱ABCDEFの体積

= 底面積(△ABC) × 高さBE で



正面から見ると、長方形BEFCの中に円がちょうど入っているように見えるので $BE = 4cm$

よって 体積 $= 12\sqrt{3} \times 4 = 48\sqrt{3}$

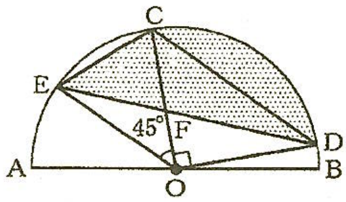
$48\sqrt{3}\ cm^3$

29A (2)　図で，Ｃ，ＤはＡＢを直径とする半円Ｏの周上の点で，

∠ＣＯＤ＝90°である。また，Ｅは弧ＣＡ上の点で，

∠ＣＯＥ＝45°であり，Ｆは線分ＣＯとＥＤとの交点である。

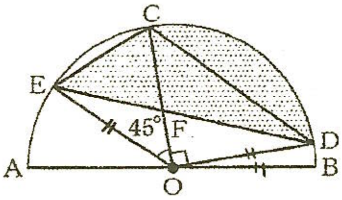
ＡＢ＝６cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。



①　線分ＣＦの長さは線分ＯＦの長さの何倍か，求めなさい。

②　線分ＣＥ，ＥＤと弧ＣＤで囲まれた　　　部分の面積は何cm²か，求めなさい。

29A (2)　図で，C，DはＡＢを直径とする半円Ｏの周上の点で，∠ＣＯＤ＝90°である。また，Ｅは弧ＣＡ上の点で，∠ＣＯＥ＝45°であり，Ｆは線分ＣＯとＥＤとの交点である。

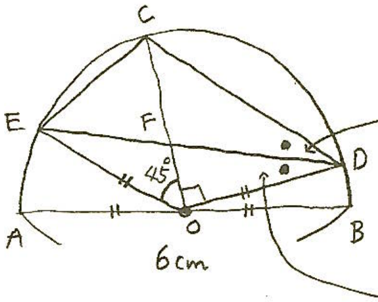


ＡＢ＝６cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

① 線分ＣＦの長さは線分ＯＦの長さの何倍か，求めなさい。

② 線分ＣＥ，ＥＤと弧ＣＤで囲まれた　　　部分の面積は何cm²か，求めなさい。

①



㋐ 中心角と円周角の関係より

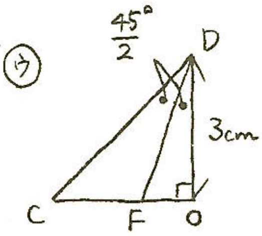
$\angle CDE = \angle COE \times \frac{1}{2}$

$= \frac{45°}{2}$

㋑ △OEDは、OE＝ODの二等辺三角形で、頂角EOD＝135°

だから 底角 $ODE = \frac{180° - 135°}{2} = \frac{45°}{2}$

㋒



DFは∠CDOの二等分線だから

DC：DO＝CF：OF

$\angle CDO = \frac{45}{2} \times 2 = 45°$

ODは円Oの半径だから $\frac{6}{2} = 3cm$

㋓ △DCOは直角二等辺三角形で、$1:1:\sqrt{2}$の比があるので、

$DC = OD \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ cm

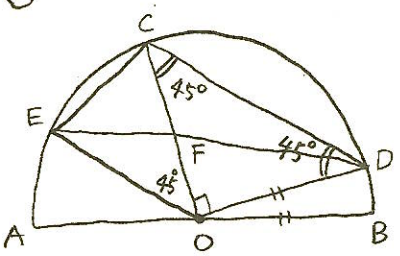
よって DC：DO＝CF：OFより

$\cancel{3}\sqrt{2} : \cancel{3} = CF : OF$

$CF : OF = \sqrt{2} : 1$ だから

CFはOFの $\underline{\sqrt{2}倍}$

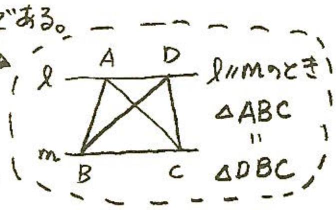
②



㋐ ∠EOC＝∠OCD＝45°だから

錯角が等しいので EO//CDである。

平行線と面積の関係から

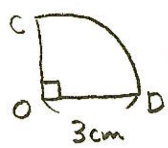


△CED＝△COD

(底辺CDが共通で 高さが同じ)

㋑ 求めたい部分の面積は、

△CED＋  だから、△COD＋ 



となる。

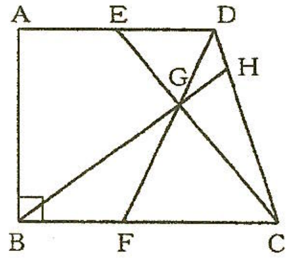
㋒  の面積は、

$\pi \times 3^2 \times \frac{\cancel{90°}^{1}}{\cancel{360°}_{4}}$

$= \frac{9}{4}\pi$　　よって $\underline{\frac{9}{4}\pi \, cm^2}$

29A (3)　図で，四角形ＡＢＣＤはＡＤ//ＢＣ，∠ＡＢＣ＝90°の台形である。Ｅは辺ＡＤの中点であり，Ｆは辺ＢＣ上の点で，ＢＦ：ＦＣ＝２：３である。また，Ｇは線分ＤＦとＥＣとの交点であり，Ｈは辺ＤＣと直線ＢＧとの交点である。

ＡＢ＝ＡＤ＝６cm，ＢＣ＝８cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。



①　線分ＥＣの長さは何cmか，求めなさい。

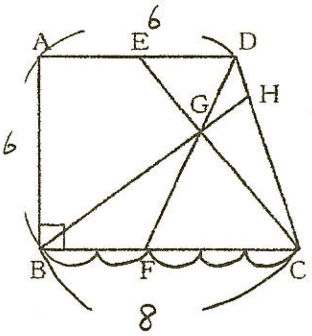
②　△ＧＢＦの面積は△ＤＧＨの面積の何倍か，求めなさい。

29A (3) 図で，四角形ＡＢＣＤはＡＤ//ＢＣ，∠ＡＢＣ＝90°の台形である。Ｅは辺ＡＤの中点であり，Ｆは辺ＢＣ上の点で，ＢＦ：ＦＣ＝２：３である。また，Ｇは線分ＤＦとＥＣとの交点であり，Ｈは辺ＤＣと直線ＢＧとの交点である。

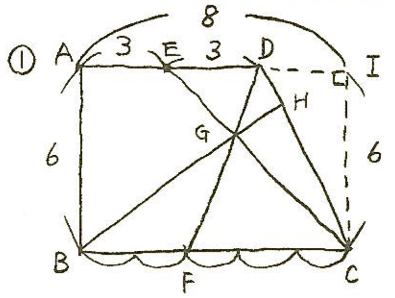
ＡＢ＝ＡＤ＝６cm，ＢＣ＝８cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

① 線分ＥＣの長さは何cmか，求めなさい。

② △ＧＢＦの面積は△ＤＧＨの面積の何倍か，求めなさい。

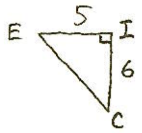


①



㋐ 長方形 ABCI となる点I をとると、△ECI は直角三角形になる。

㋑ IE = 8−3 = 5cm だから 三平方の定理より

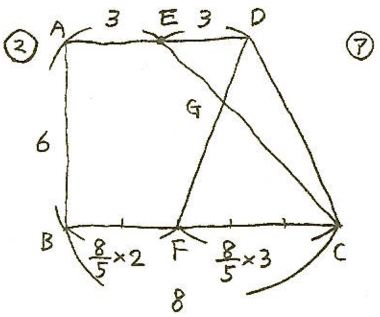


$EC^2 = \underset{25}{5^2} + \underset{36}{6^2} = 61$

$EC = \sqrt{61}$

よって $\underline{\sqrt{61}\ \text{cm}}$

②



㋐ BF:FC = 2:3, BC = 8cm だから

$FC = \frac{8}{5} \times 3 = \frac{24}{5}$ cm になる。

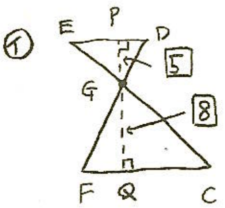
△GFC ∽ △GDE で

相似比は FC:DE を考えると

$\frac{24}{5} : 3 = \frac{24}{5} : \frac{15}{5} = 24 : 15 = 8 : 5$

となり 8:5 とわかる。

㋑

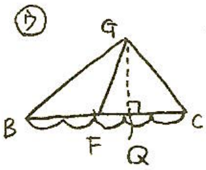


Gを通り AB∥PQ となる PQ をひくと

PQ = 6cm で GQ : GP = 8 : 5 より

$GQ = 6 \times \frac{8}{13} = \frac{48}{13}$ cm

㋒



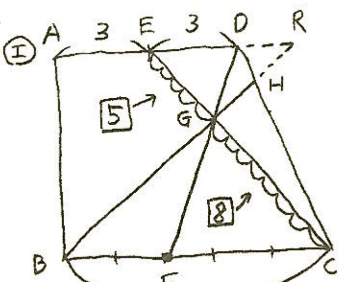
△GBC の面積は $BC \times GQ \times \frac{1}{2}$ だから

$\triangle GBC = 8 \times \frac{48}{13} \times \frac{1}{2} = \frac{192}{13}$

$\triangle GBF = \triangle GBC \times \frac{2}{5} = \frac{192}{13} \times \frac{2}{5} = \frac{384}{65}\ \text{cm}^2$

（BF:FC = 2:3 より BF は BC の $\frac{2}{5}$ 倍）

㋓



△DGH の面積は、DH:HC の比と △DGC の面積がわかれば、求まる。

そこで、BH と AD の延長線の交点を R とする。

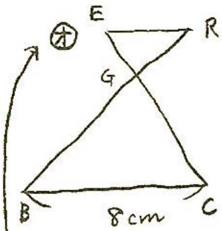
△GBC ∽ △GRE となり

相似比は GC:GE で、

これは、上の㋐で考えた 8:5 に等しい。

（△GFC ∽ △GDE で GF:GD = GC:GE だから）

㋔



△GBC ∽ △GRE で

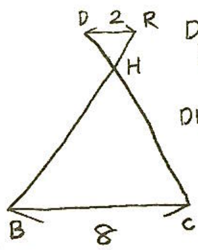
BC : RE = GC : GE より

8cm 8 5

RE = 5cm とわかる。

㋕ RE = 5cm, ED = 3cm より

DR = 2cm だから

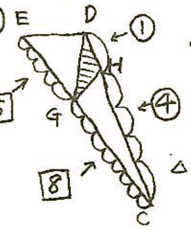


DR : CB = DH : CH

2 : 8 = 1 : 4 より

DH : HC = 1 : 4 とわかる。

㋖



△ECD は、底辺 3cm 高さ 6cm だから

$\triangle ECD = \frac{3 \times 6}{2} = 9\ \text{cm}^2$

$\triangle DGH = \triangle DGC \times \frac{1}{5}$ （DH:HC = 1:4 より）

$= \triangle DEC \times \frac{8}{13} \times \frac{1}{5}$ （EG:GC = 5:8 より）

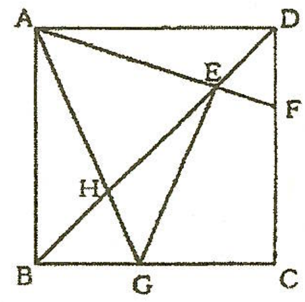
$= 9 \times \frac{8}{13} \times \frac{1}{5} = \frac{72}{65}\ \text{cm}^2$

㋗ よって △GBF ÷ △DGH より

$\frac{384}{65} \div \frac{72}{65} = \frac{384}{65} \times \frac{65}{72} = \frac{96}{18} = \frac{16}{3}$

$\frac{16}{3}$ 倍

29B (2)　図で，四角形ＡＢＣＤは正方形である。Ｅは，線分ＤＢ上の点で，ＤＥ：ＥＢ＝１：３であり，Ｆは直線ＡＥと辺ＤＣとの交点である。また，Ｇは辺ＢＣ上にあり，線分ＡＧとＧＥの長さの和が最小となる点で，Ｈは線分ＡＧとＥＢとの交点である。



ＡＢ＝８cm のとき，次の①，②の問いに答えなさい。

①　△ＡＢＥの面積は△ＤＥＦの面積の何倍か，求めなさい。

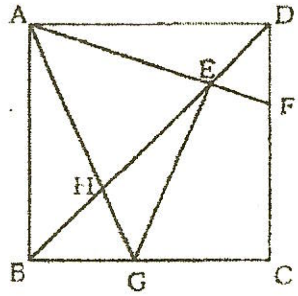
②　△ＡＨＥの面積は何cm^2か，求めなさい。

29B (2)　図で，四角形ＡＢＣＤは正方形である。Ｅは，線分ＤＢ上の点で，ＤＥ：ＥＢ＝１：３であり，Ｆは直線ＡＥと辺ＤＣとの交点である。また，Ｇは辺ＢＣ上にあり，線分ＡＧとＧＥの長さの和が最小となる点で，Ｈは線分ＡＧとＥＢとの交点である。

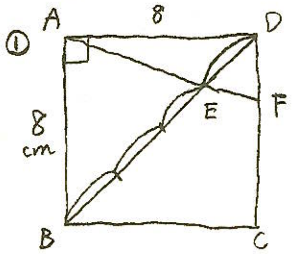
ＡＢ＝８cm のとき，次の①，②の問いに答えなさい。

①　△ＡＢＥの面積は△ＤＥＦの面積の何倍か，求めなさい。

②　△ＡＨＥの面積は何cm²か，求めなさい。



①



AB∥DCより

△ABE∽△FDEで

相似比は BE：ED＝3：1

よって 面積比は，$3^2:1^2=9:1$

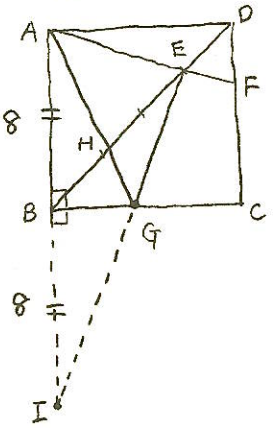
△ABEは△DEFの 9倍

② ㋐ AG＋GEが最小

“折れまがった線分の和が最小”

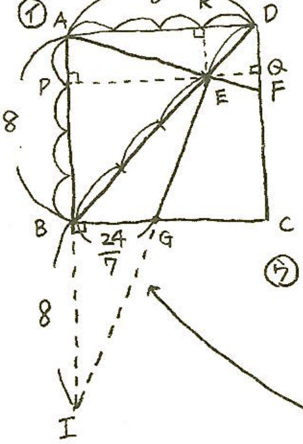
↓

ある２点間の線分が一直線になること



左図のように ABの延長線上に AB＝BIとなる点Iをとり，EIが一直線のとき EG＋GIは最短(最小)となる。△ABGと△IBGは合同だから，IG＝AGとなり，EG＋AGも最小となる。

㋑



左図のようにEを通ってABやADに平行な線分PQ，ERをひくと

DE：EB＝1：3だから，

$PE = \underset{8cm}{PQ} \times \frac{3}{4} = 6cm$

$PB = AB \times \frac{3}{4} = 6cm$ となる。

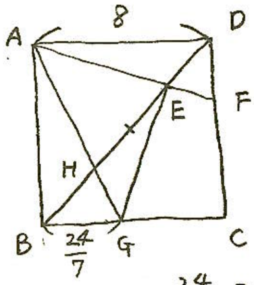
㋒ PE∥BGより △IPEで

$BG : \underset{6cm}{PE} = \underset{\substack{8cm \\ 4}}{IB} : \underset{\substack{14cm \\ 7}}{IP}$

$7BG = 24$

$BG = \frac{24}{7}$ cmとわかる。

㋓



BH：DHを考えると

△HBG∽△HDA

だから

BH：DH＝BG：DA

$BH : DH = \frac{24}{7} : 8$

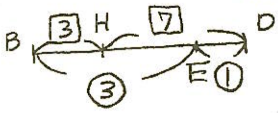
$= \frac{24}{3} : \frac{8 \times 7}{1}$

BH：DH＝3：7

㋔ BE：DE＝3：1だったので

線分BDで BH：HE：EDを考えると

“連比”の求め方

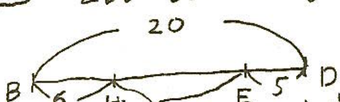


大切!!

BDを一方は3：7に分けるから 10等分

またBDを一方は3：1に分けるから 4等分

最大ポイント ➡ 10と4の最小公倍数の20をBDの長さと，仮に考えて

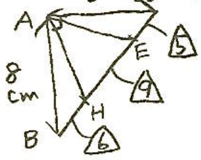


まずBHは $20 \times \frac{3}{10}$　最後に　次にEDは $20 \times \frac{1}{4}$

HE＝20－(6＋5)

HE＝9と考える!!

6：9：5とわかる!!



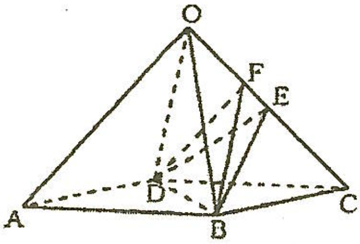
㋕ $\triangle AHE = \triangle ABD \times \frac{9}{20}$ (底辺が9：20だから)

$= \frac{\overset{4}{\cancel{8}} \times \overset{2}{\cancel{8}}}{\cancel{2}} \times \frac{9}{\underset{5}{\cancel{20}}}$

$= \frac{72}{5}$　よって $\frac{72}{5}$ cm²

29B (3)　図で，立体ＯＡＢＣＤは，正方形ＡＢＣＤを底面とする正四角すいである。Ｅは辺ＯＣの中点，Ｆは辺ＯＣ上の点で，ＯＦ：ＦＣ＝１：２である。

正四角すいＯＡＢＣＤのすべての辺の長さが６cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

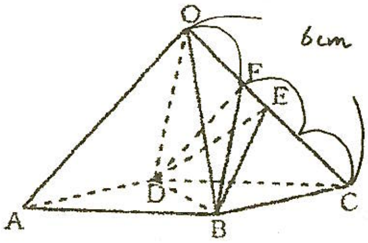


①　線分ＦＢの長さは何cmか，求めなさい。

②　Ｂ，Ｄ，Ｅ，Ｆを頂点とする三角すいの体積は何cm³か，求めなさい。

29B (3) 図で，立体ＯＡＢＣＤは，正方形ＡＢＣＤを底面とする正四角すいである。Ｅは辺ＯＣの中点，Ｆは辺ＯＣ上の点で，ＯＦ：ＦＣ＝１：２である。

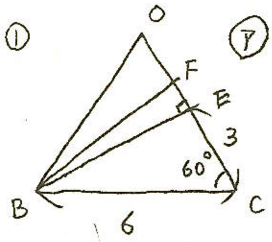
正四角すいＯＡＢＣＤのすべての辺の長さが６cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。



① 線分ＦＢの長さは何cmか，求めなさい。

② Ｂ，Ｄ，Ｅ，Ｆを頂点とする三角すいの体積は何cm³か，求めなさい。

①



㋐ 正三角形OBCでBEはOCの垂直二等分線だから △BECは 1:√3:2 の比を（EC EB BC）もつ三角形。

$BE = EC \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ cm（EC 3cm）

㋑ OF : FC = 1 : 2 より

$OF = OC \times \frac{1}{3} = 2$ cm で（OC 6cm）

$FE = OE - OF = 1$ cm（OE 3, OF 2）

よって直角三角形BEFで三平方の定理より

$BF^2 = BE^2 + EF^2$

$= 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} + 1^2$

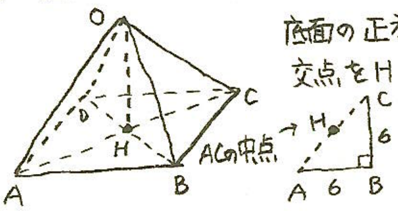
$= 27 + 1 = 28$

$BF = \sqrt{28}$

$= 2\sqrt{7}$

2√7cm

② ㋐ 正四角すいの高さを求める。

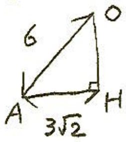


底面の正方形の対角線の交点をHとすると、△ABCは 1:1:√2の比 だから

$AC = 6\sqrt{2}$ cm

$AH = 3\sqrt{2}$ cm

㋑ △OAHで



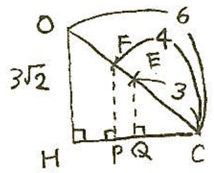
三平方の定理より

$OH^2 + (3\sqrt{2})^2 = 6^2$　　$3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 9 \times 2$

$OH^2 = 36 - 18$

$OH = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ cm

㋒ 直角三角形OHCでF, EからHCに垂線FP, EQをひく。CO=6cm,



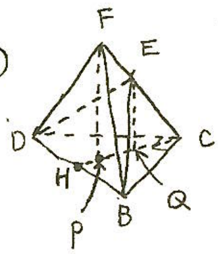
CE=3cm, CF=4cm だから、

$EQ = OH \times \frac{3}{6} = 3\sqrt{2} \times \frac{3}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm

$FP = OH \times \frac{4}{6} = 3\sqrt{2} \times \frac{2}{3} = 2\sqrt{2}$ cm

とわかる。

㋓

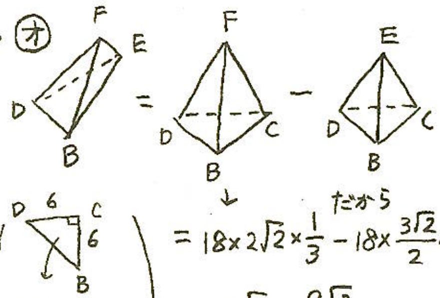


FPは四面体FDBCの高さ$(2\sqrt{2})$

EQは四面体EDBCの高さ$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ であり、

2つの四面体の底面は、2つとも直角二等辺三角形である△DBCになる。

㋔



$\frac{6 \times 6}{2} = 18\text{cm}^2$

だから

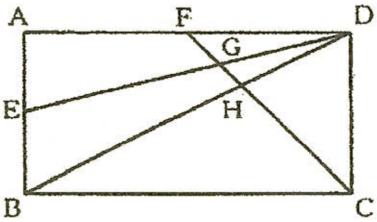
$= 18 \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{3} - 18 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{3}$

$= 12\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$

$= 3\sqrt{2}$

よって **$3\sqrt{2}$ cm³**

28B (2) 図で，四角形ＡＢＣＤは長方形で，Ｅ，Ｆはそれぞれ辺ＡＢ，ＡＤの中点である。また，Ｇ，Ｈはそれぞれ線分ＦＣとＤＥ，ＤＢとの交点である。



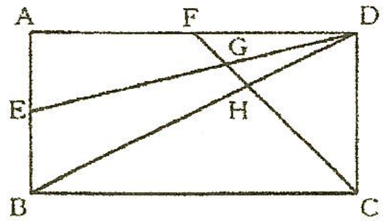
ＡＢ＝２ cm，ＡＤ＝４ cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。

① 線分ＦＨの長さは何cmか，求めなさい。

② △ＤＧＨの面積は四角形ＡＢＣＤの面積の何倍か，求めなさい。

28B (2) 図で，四角形ＡＢＣＤは長方形で，Ｅ，Ｆはそれぞれ辺ＡＢ，ＡＤの中点である。また，Ｇ，Ｈはそれぞれ線分ＦＣとＤＥ，ＤＢとの交点である。

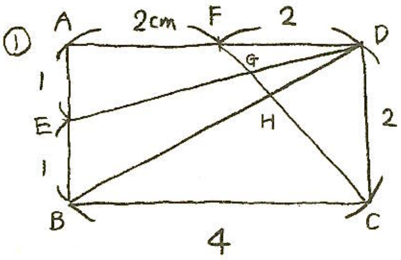
ＡＢ＝２ cm，ＡＤ＝４ cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。



① 線分ＦＨの長さは何cmか，求めなさい。

② △ＤＧＨの面積は四角形ＡＢＣＤの面積の何倍か，求めなさい。

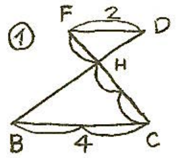
①



求めたい
FHは、FCの一部で FCと
FH：HCがわかれば、求まる。

㋐ △FDCは、直角二等辺三角形だから、1:1:$\sqrt{2}$の比があるので、$FC = DC \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$cm
（DC = 2cm）

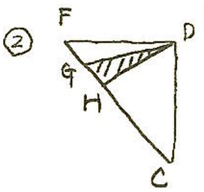
①



△HFD∽△HCB より
FH：CH＝FD：CB
＝2：4
＝1：2

㋒ よって $FH = FC \times \frac{1}{3} = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{3}$
$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 　 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$cm

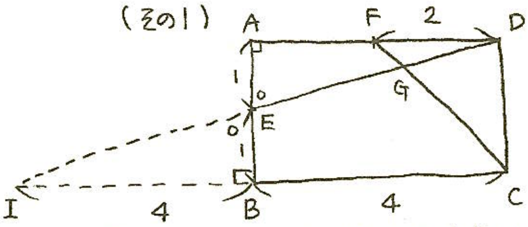
②



㋐ 　連比
△DGHの面積は、FG：GH：HCがわかれば、△FDCの面積から求まる。

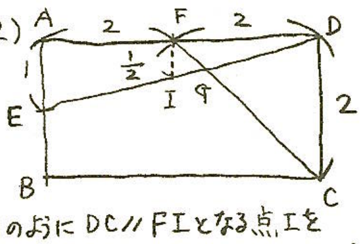
㋑ FG：GCを求める方法が２つある。

（その１）



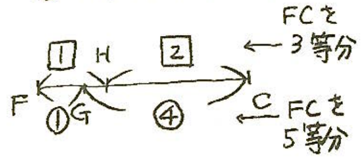
上図のようにDE, CBを延長させた交点をIとすると、△EAD≡△EBIとなり、IB＝4cmとなる。
△GFD∽△GCI より
FG：CG＝FD：CI＝1：4
（FD = 2cm，CI = 8cm）

（その２）

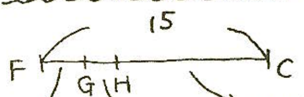


上図のようにDC // FIとなる点IをDE上にとると、DF：DA＝FI：AEより
（DF = 2，DA = 4，AE = 1）
FI＝$\frac{1}{2}$とわかる。
△GFI∽△GCD より
FG：CG＝FI：CD＝$\frac{1}{2}$：2＝1：4

㋒ ①の㋑より FH：CH＝1：2
②の㋑より FG：CG＝1：4だから



3等分と5等分なので、3と5の最小公倍数の15を、仮のFCの長さと考えて

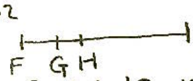


まず $FG = FC \times \frac{1}{5}$
$= 15 \times \frac{1}{5}$
$= 3$

次に $HC = FC \times \frac{2}{3}$
$= 15 \times \frac{2}{3}$
$= 10$

最後に
GH＝FC－(FG＋HC)
＝15－(3＋10)
＝2

よって



3：2：10 とわかる。

㋓ $\triangle DGH = \triangle FDC \times \frac{2}{15} = \frac{2 \times 2}{2} \times \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$cm^2
長方形ABCD＝2×4＝8cm^2 だから
△DGH÷長方形ABCD $\frac{4}{15} \div 8 = \frac{4}{15} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{30}$

$\frac{1}{30}$倍