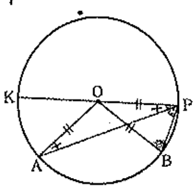
3年　数学　教科書（P.154～170）

6章　円の性質（プリントNo.55～60）

3年　教科書　No.55（P.157～159）

P.157

$\boxed{1}$



$\angle APK = \frac{1}{2}\angle AOK$

$\angle BPK = \frac{1}{2}\angle BOK$

よって　$\angle APB = \angle BPK - \angle APK$

$= \frac{1}{2}(\angle BOK - \angle AOK)$

$\angle AOB = \angle BOK - \angle AOK$ だから

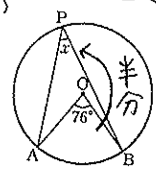
$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$

円周角の定理

P.158　（中心角 $\times \frac{1}{2}$ = 円周角，同じ弧なら円周角も等しい）

$\boxed{2}$

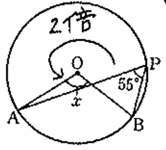
(1)



$\angle x = 76 \times \frac{1}{2}$

$= 38$　　$\underline{38°}$

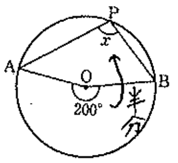
(2)



$\angle x = 55 \times 2$

$= 110$　　$\underline{110°}$

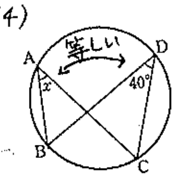
(3)



$\angle x = 200 \times \frac{1}{2}$

$= 100$　　$\underline{100°}$

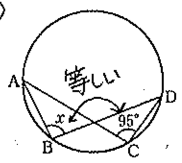
(4)



$\angle x = 40$

$\underline{40°}$

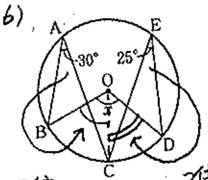
(5)



$\angle x = 95$

$\underline{95°}$

(6)



$\angle BOC = 30 \times 2 = 60$

$\angle COD = 25 \times 2 = 50$

$\angle x = \angle BOC + \angle COD$

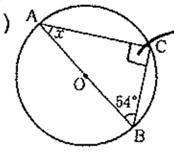
$= 60 + 50$

$= 110$　　$\underline{110°}$

P.159　（直径があれば、円周角は90°）← 絶対目をつける!!

$\boxed{3}$

(1)

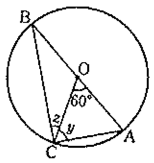


90°になる

$\angle x = 90 - 54$

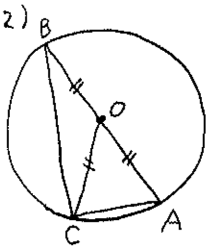
$= 36$　　$\underline{\angle x = 36°}$

(2)



とても大切な問題だから右上で説明!

$\boxed{3}$ (2)



・ABが直径

↓

$\angle ACB = 90°$

・半径だから

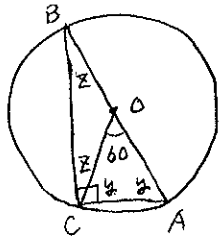
$OB = OC = OA$

$\triangle OBC$, $\triangle OCA$ は、二等辺三角形

絶対大切!!

- 直径があれば、90°ができる。（または、線を加えて、90°をつくる。）
- 半径があれば、二等辺三角形ができ、2つの角（底角）は等しい!

あらためて



$\triangle OBC$ で内角・外角の関係から

$2z = 60$

$z = 30$

ABが直径だから

$\angle ACB = 90°$

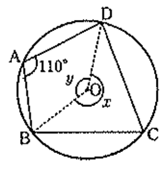
よって　$y = 90 - z$

$= 90 - 30$

$= 60$

$\underline{\angle y = 60°,\ \angle z = 30°}$

自分のことばで伝えよう



$\angle x$ は円周角 $\angle DAB$（110°）の中心角だから

$\angle x = 110 \times 2 = 220$

$\angle x + \angle y = 360°$ だから

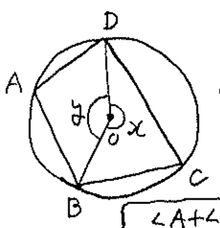
$\angle y = 360 - 220 = 140$

円周角 $\angle C$ は中心角 $\angle y$ の半分だから

$\angle C = 140 \times \frac{1}{2} = 70$

よって　$\angle C = 70°$

一般的に



円周角の定理より

$\angle A = \frac{1}{2}\angle x$，$\angle C = \frac{1}{2}\angle y$

また、$\angle x + \angle y = 360°$ だから

$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}\angle x + \frac{1}{2}\angle y$

$= \frac{1}{2}(\angle x + \angle y)$

$= \frac{1}{2} \times 360°$

$= 180°$

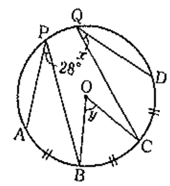
$\angle A + \angle C = 180°$

向かいあう内角の和は、いつも180°

3年　教科書　No.56（P.160〜165）

P.160

4



$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ だから 円周角は等しいので $\angle P = \angle Q = 28°$ $(\angle x)$

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$ だから

$\angle y = \overset{\frown}{AB}$の円周角 $\times 2$

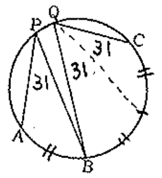
$= 28 \times 2$

$= 56$

$\angle x = 28°$

$\angle y = 56°$

5



$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AB} \times 2$ だから

円周角も 2倍になる。

$\angle BQC = 31 \times 2$

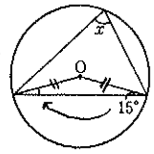
$= 62$

$62°$

練習問題

①

(1)

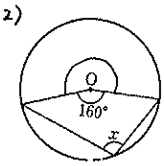


半径↓↑二等辺三角形

二等辺三角形の頂角（＝中心角）が $180° - 15 \times 2$ で $150°$ だから

円周角 $\angle x = \dfrac{150}{2} = 75$　$75°$

(2)



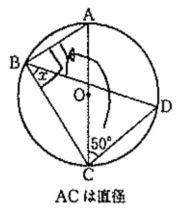
円周角 $\angle x$ の中心角は、図の$160°$の上の角だから

$360° - 160°$ で $200°$になる。

$\angle x = \dfrac{200}{2} = 100$

$100°$

(3)



ACは直径

直径↓↑円周角90°

ACが直径だから、

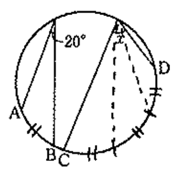
$\angle ABC = 90°$。

$\angle ABD = \angle ACD = 50°$だから

$\angle x = 90 - 50 = 40$

$40°$

(4)



$\overset{\frown}{CD}$ は $\overset{\frown}{AB}$ の3倍

$\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB} \times 3$ だから

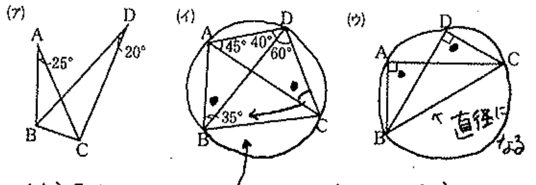
円周角も3倍になる。

$\angle x = 20° \times 3 = 60°$

$60°$

P.163

1



円周角にあたる角が等しいので、

(イ), (ウ)

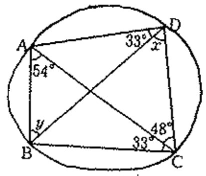
$\angle DCA = 180 - (45 + 40 + 60)$

$= 180 - 145$

$= 35$

P.163

2



$\angle ADB = \angle ACB = 33°$ だから 4点 ABCDは 円周上にある。同じ弧に対する円周角は等しいので、

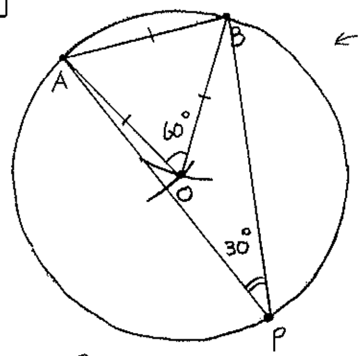
$\angle x = \angle BAC = 54°$

$\angle y = \angle ACD = 48°$

$\angle x = 54°$, $\angle y = 48°$

P.165

1



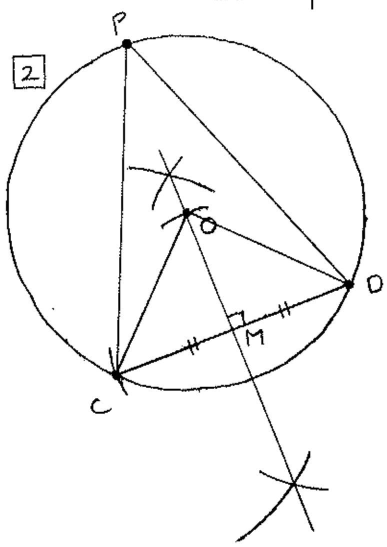
← コンパスの線がうすいので、上からなぞりました！

$\angle AOB = 60°$だから

円周角の定理より

$\angle APB = 60° \times \dfrac{1}{2} = 30°$

2



①CDの垂直二等分線をひく。

② 垂直二等分線とCDの交点をMとしMC＝MOとなる点OをコンパスでE垂直二等分線上にとる。

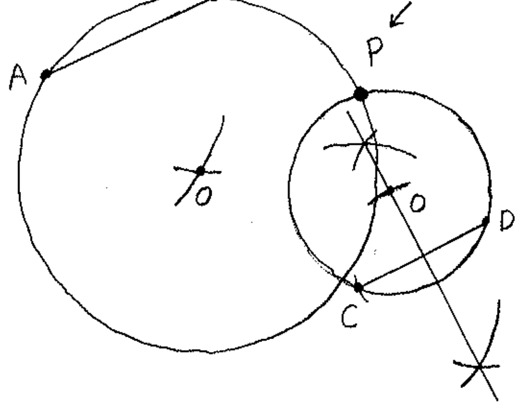
③ △OCDは直角二等辺三角形となり

$\angle COD = 90°$だから、

$\angle CPD = 45°$となる。

3

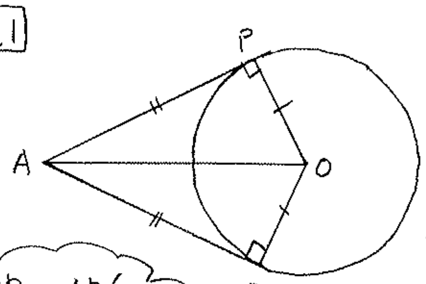
船の位置 P



3年 教科書 No.57 (P.166～168)

P.166

例題1



$\triangle APO$と$\triangle AP'O$で

半径だから

$OP = OP'$

接線⊥半径だから

$\angle APO = \angle AP'O = 90°$

共通だから

$AO = AO$

⇓

$\triangle APO \equiv \triangle AP'O$

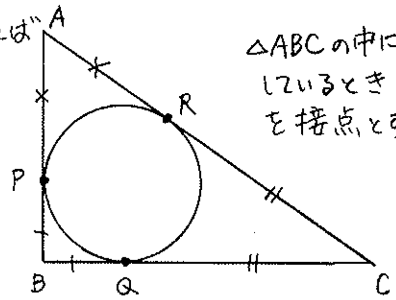
$AP = AP'$

接線の長さは等しい

とても大切。応用問題で

解くきっかけになることあり!

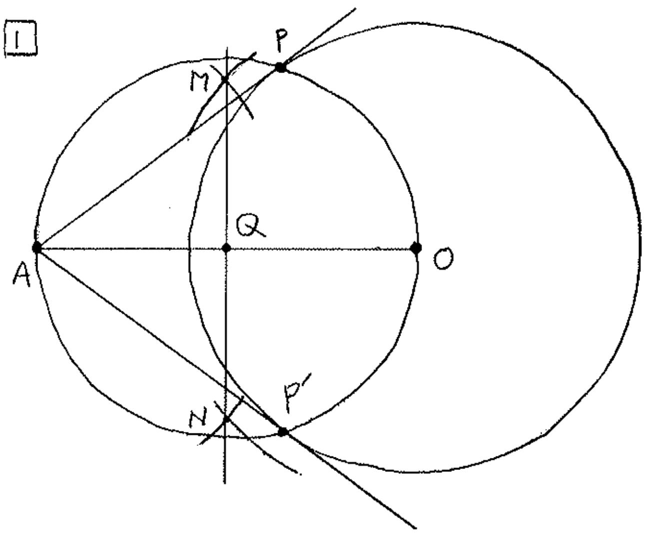
たとえば



$\triangle ABC$の中に円が接しているとき、P, Q, Rを接点とすると

$AP = AR$, $BP = BQ$, $CQ = CR$!!

1



① 点A, Oを中心として、交わるような半径で円の弧をそれぞれからひく。

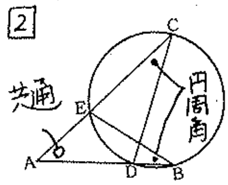
② 2つの交点をM, Nとし、MNをひき、AOとの交点をQとする。

③点Qを中心に2点A, Oをとおる円をかき、はじめからある円Oとの交点をP, P′とする。

④ AP, AP′が円Oの接線となる。

P.167

2



(証明)

$\triangle ABE$と$\triangle ACD$で

共通だから

$\angle BAE = \angle CAD$ －①

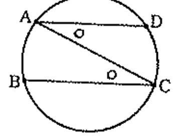
$\overset{\frown}{ED}$に対する円周角だから

$\angle ABE = \angle ACD$ －②

①, ②から 2組の角が、それぞれ等しいので

$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$

3



(1) 線分ACをひく。

$AD \parallel BC$だから

$\angle ACB = \angle DAC$

1つの円で、等しい円周角に対する弧の長さは等しいので、

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

(2) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$だから

$\angle ACB = \angle DAC$

よって錯角が等しいので、$AD \parallel BC$

だから (1)の逆は成り立つ。

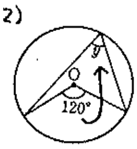
P.168 6章の基本のたしかめ

1

(1)

$\angle x = 50°$

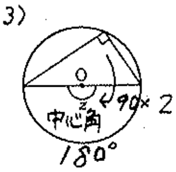
(2)



円周角＝中心角×$\frac{1}{2}$

$\angle y = 60°$

(3)

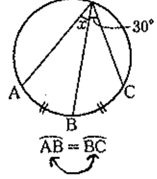


180°

$\angle z = 180°$

2

(1)

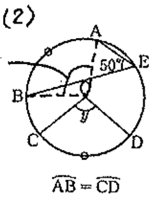


弧が等しいから

円周角も等しい

$\angle x = 30°$

(2) 50×2

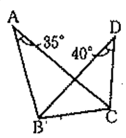


$\overset{\frown}{AB}$に対する中心角＝50×2＝100

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$だから $\angle y = 100°$

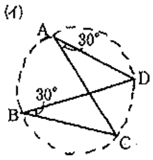
3

(ア)



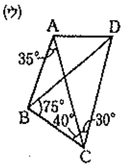
$\angle A$と$\angle D$が等しくないので、×

(イ)



$\angle A = \angle B$だから同じ円周上

(ウ)



$\triangle DBC$で

$\angle BDC$は

$180 - 145 = 35$

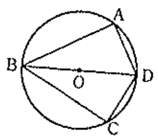
$\angle BAC = \angle BDC$ だから同じ円周上

(イ)と(ウ)

3年　教科書　No.58 (P.168〜169)

P.168　　基本のたしかめ　つづき

4



(証明)　△ABDと△CBDで

直径に対する円周角だから

$\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ —①

共通だから　BD = BD —②

$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DC}$ だから　$\angle ABD = \angle CBD$ —③

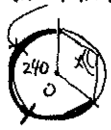
①,②,③から　直角三角形の斜辺と1つの鋭角が、それぞれ等しいので

$\triangle ABD \equiv \triangle CBD$

P.169　　6章の章末問題

1

(1) 円周の $\frac{2}{3}$ の弧に対する中心角は、



$360^\circ \times \frac{2}{3} = 240^\circ$ だから

円周角は、$240^\circ \times \frac{1}{2} = 120^\circ$

120°

(2) 円周の $\frac{2}{5}$ の弧に対する中心角は

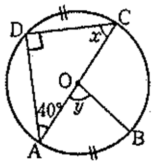
$360^\circ \times \frac{2}{5} = 144^\circ$ だから

円周角は、$144^\circ \times \frac{1}{2} = 72^\circ$

72°

2

(1)



$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$
ACは直径

ACが直径だから

$\angle D = 90^\circ$

△CDAで

$\angle x = 180 - (90 + 40)$
$= 50$

$\overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{AB}$ だから円周角は等しく、

∠yは、円周角40°の弧に対する中心角だから

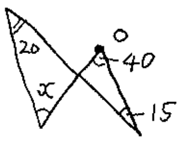
$\angle y = 40 \times 2 = 80$

$\angle x = 50^\circ$, $\angle y = 80^\circ$

(2)

中心角40°に対する円周角は、

$40 \times \frac{1}{2} = 20$

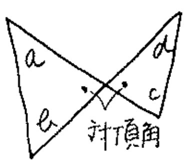


「ちょうちょ」の性質より

$20 + x = 40 + 15$
$x = 55 - 20$
$= 35$

$\angle x = 35^\circ$

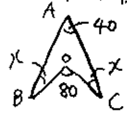
「ちょうちょ」の性質



$\angle a + \angle b = \angle d + \angle c$

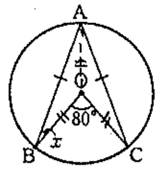
または!!

ブーメランに目をつけて



$x + 40 + x = 80$
$2x = 40$
$x = 20$

(3)



AB = AC

半径AOをひくと

AO = BO = CO となり

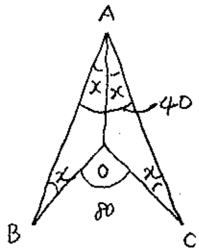
AB = ACでもあるので、

△OAB ≡ △OAC となる。

二等辺三角形の底角は等しいから

$\angle OBA = \angle OAB = \angle OAC = \angle OCA = x$

$\angle BAC = \angle BOC \times \frac{1}{2}$
$= 80 \times \frac{1}{2}$
$= 40$



これが 2x だから

$2x = 40$
$x = 20$

$\angle x = 20^\circ$

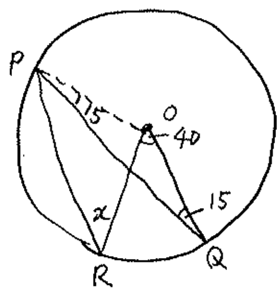
角度の問題で、図に線をかき加えないと、解けないものは、比較的難しい。

円の問題なら・・・

半径を加えて二等辺三角形にしたり、
直径に目をつけ、90°を意識したり、
円周角や中心角になるように線を加えたり
することが、とても大切!!

⇓

2 (2)は、下の点線を加えてみると



△OPQ と △OPRが
(形のちがう)二等辺三角形だから

$\angle OPQ = 15^\circ$

中心角・円周角の関係より

$\angle RPQ = 20^\circ$

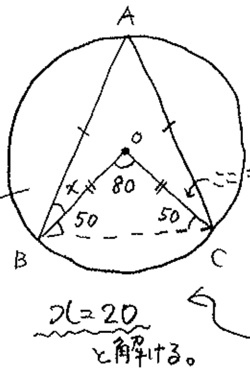
△OPRで

$\angle OPR = \angle ORP$ より

$15 + 20 = x$

よって $\angle x = 35^\circ$ と解ける。

2 (3)は、BCを加えてみると



△OBCで $\angle OBC = \angle OCB = 50$

△ABCで $\angle ABC = \angle ACB = x + 50$

中心角・円周角の関係より

$\angle A = 40$

よって△ABCで

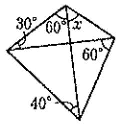
$40 + (x + 50) + (x + 50) = 180$
$2x + 140 = 180$
$2x = 40$

$x = 20$ と解ける。

3年 教科書 No.59 (P.169)

P.169 章末問題つづき

③ (1)



ポイント!!

円周角の定理の逆

∠BAC=∠BDC なら 四角形ABCDは円周上にある

⇓

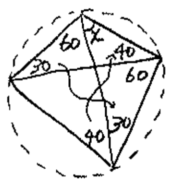
だから他の円周角も等しくなり

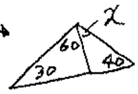
∠ADB=∠ACB

∠DAC=∠DBC となる

∠ABD=∠ACD

60°の角に目をつけると四角形が円周上にあることがわかる。





左の三角形に目をつけて

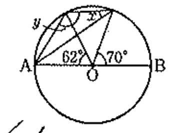
$30+60+x+40=180$

$x=180-130$

$=50$

$\angle x=50°$

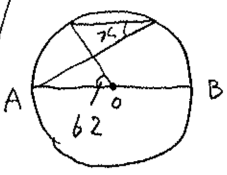
(2)



ABは直径

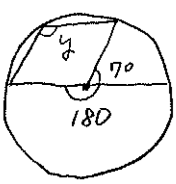
ポイント

- 円周角は中心角の半分
- 半径は等しいから二等辺三角形ができる
- 直径があったら、90°ができるかも!!



∠xは中心角62°に対する円周角だから

$\angle x = 62 \times \frac{1}{2} = 31$　　$\angle x=31°$

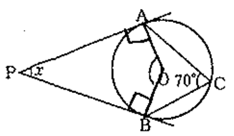


∠yは中心角250°(70+180)に対する円周角だから

$\angle y = 250 \times \frac{1}{2} = 125$

$\angle y=125°$

(3)



PA, PBは円Oの接線で、点A, Bはその接点

ポイント

接線は半径と垂直

AOとBOをひくと

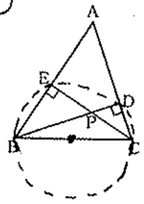
$\angle PAO=\angle PBO=90°$

∠AOBは円周角∠ACBに対する中心角だから $70 \times 2=140°$

四角形APBOに目をつけ、$\angle x+90+140+90=360$

$\angle x=40°$ ← $\angle x=360-320=40$

④



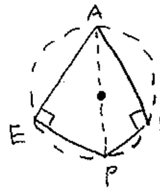
見つけやすいのは、

∠BEC=∠BDC=90°で

円周角が等しいので、

4点E, B, C, Dは同じ円周上

次にA, E, P, Dに目をつけると



∠AEP=90°だから3点A, E, PはAPを直径とする円周上にある。

同じように

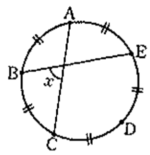
∠ADP=90°だから3点A, D, PもAPを直径とする円周上にある。

APを直径とする円は、1つしかありえないから

4点A, E, P, Dも同じ円周上にある。

4点A, E, P, Dと4点B, C, D, E

⑤

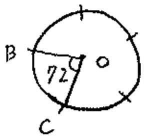


円周上を5等分

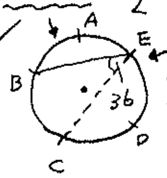
⇓

中心角は $\frac{360°}{5}=72°$ になる

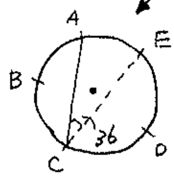
↓



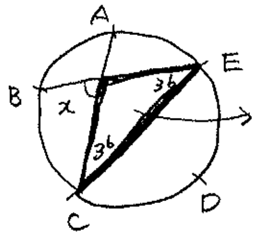
円周角は $\frac{72°}{2}=36°$

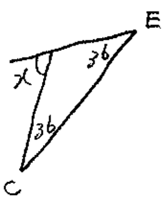


ECをひく



●補助線としてECをひく場合

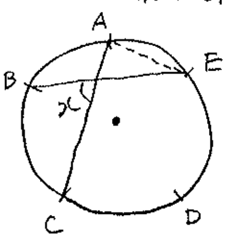




内角と外角の関係から

$\angle x=72°$ ← $\angle x=36+36=72$

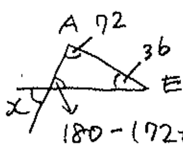
● 補助線としてAEをひく場合



$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角∠AEB=36°

$\overset{\frown}{CE}$に 〃 ∠CAE=72°

だから



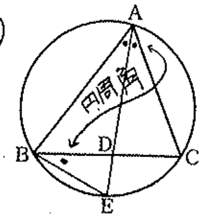
$180-(72+36)=180-108=72$

対頂角は等しいので $\angle x=72°$

3年　教科書　No.60 (P.170)

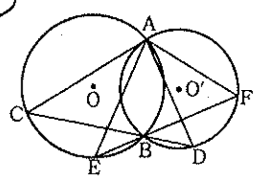
P.170　　章末問題つづき

⑥



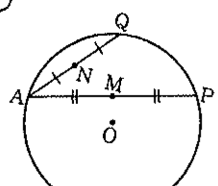
(証明)
$\triangle ABE$ と $\triangle BDE$ で
仮定より $\angle BAE = \angle EAC$ －①
$\overset{\frown}{EC}$ に対する円周角だから
$\angle EAC = \angle DBE$ －②
①,②から　$\angle BAE = \angle DBE$ －③
また、共通だから $\angle AEB = \angle BED$ －④
③,④から　2組の角が、それぞれ等しいので　$\triangle ABE \backsim \triangle BDE$

⑦



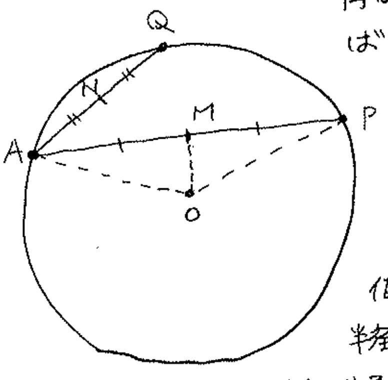
(証明)
$\triangle ACD$ と $\triangle AEF$ で
円Oの $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角だから
$\angle ACD = \angle AEF$ －①
また円O′の $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角だから
$\angle ADC = \angle AFE$ －②
①,②から　2組の角が、それぞれ等しいので
$\triangle ACD \backsim \triangle AEF$

⑧



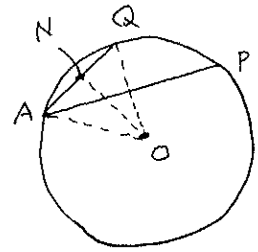
$AN = QN$
$AM = PM$　ならば

4点 A, O, M, Nは
同じ円周上
↑
円周角の位置にあたる角が等しいことが、いえればOK!!

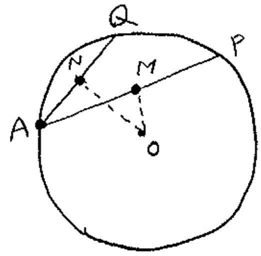


補助線として
OA, OP, OMをひき、
$\triangle OAM$ と $\triangle OPM$ で
仮定より $AM = PM$ －①
半径だから $OA = OP$ －②
また共通だから $OM = OM$ －③
①,②,③から　3辺がそれぞれ等しいので
$\triangle OAM \equiv \triangle OPM$　→ 右上へつづく

対応する角は等しいので
$\angle OMA = \angle OMP = \frac{1}{2}\underbrace{\angle AMP}_{180^\circ} = 90^\circ$ －④

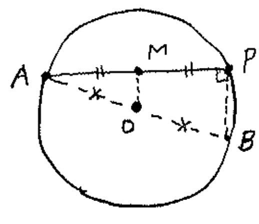


同じように補助線として
OA, OQ, ONをひき
$\triangle OAN$ と $\triangle OQN$ に目をつけると、合同といえる。
よって $\angle ONA = \angle ONQ = 90^\circ$ －⑤

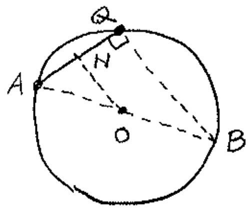


④,⑤から
$\angle OMA = \angle ONA = 90^\circ$
円周角にあたる角が等しいので、4点 A, O, M, Nは
同じ円周上にある。

別の説明

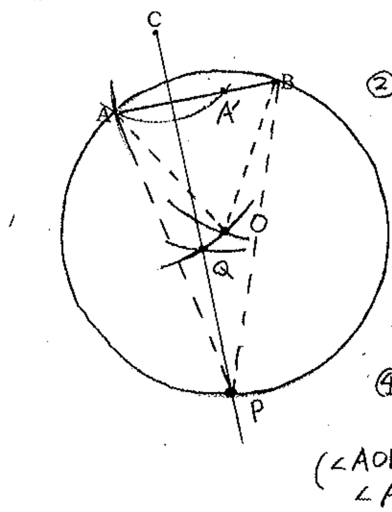


補助線として直径ABと
PB, MOをひく。
MとOは、それぞれAPとABの中点だから、中点連結定理より $MO \parallel PB$ －①
$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角だから $\angle APB = 90^\circ$ －②
①,②から $\angle AMO = \angle APB = 90^\circ$ －③



同じように QB, NO をひいて
考えると
$\angle ANO = 90^\circ$ －④
③,④より　$\angle ANO = \angle AMO = 90^\circ$ だから
4点 A, O, M, Nは同じ
円周上にある。

⑨



① Cを中心にして $CA = CA'$ となる点 A′ を AB上にとる。
② $AQ = A'Q$ となる点Qをとり CQをひく。
($AB \perp CQ$ となる)
③ 正三角形 ABO となるよう点Oをとり、
Oを中心に半径OA ($=OB$) の円をかく。
④ CPと円の交点をPとする。
($\angle AOB = 60^\circ$ だから円周角 $\angle APB$ は 30° となる)