

14

岡崎

美川中学校

キタムラ ユウヤ
氏名 北村 優也

分科会番号

4

分科会名

数学教育（数学）

研究題目

見通しをもち、対話的な問題解決の中で、考えを深めることができる生徒の育成
～3年生「図形と相似」の実践を通して～

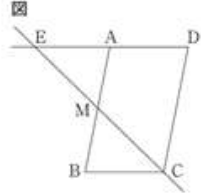
研究要項

1 研究概要

(1) はじめに

平成28年度全国学力・学習状況調査において「筋道を立てて考え、証明することができるかどうかを見る」ことを趣旨としたICT活用の問題の正答率が全国的に低かった。平行四辺形をいろいろな形に変形させる中で、対応する辺の長さが等しいことを証明するものであり、冷静に分析すれば根拠となる性質や合同な図形は比較的容易に見つけることができる。しかし、正答率は30%と低くなっており、その中に証明の表現が不十分であるものが11.3%も含まれていることが分かった。それに対し、本校の生徒は正答率が全国平均より10%余り下回り、危機感を抱いた。問題を分析するに、この文章だけでも十分に答えの見通しが立つであろうし、ICT活用の資料で変化が視覚的に捉えやすくなっているので、おおむね正答できるであろうと考える。なぜ答えの見通しが立てられず無回答になったり、表現の誤りがあったりするのかを検証する必要性を感じた。

4 右の図のように、平行四辺形ABCDの辺ABの中点をMとし、辺DAを延長した直線と直線CMとの交点をEとします。ここで、健一さんと琴音さんは、コンピュータを使って平行四辺形ABCDをいろいろな形の平行四辺形に変え、いつでも成り立ちそうなことがらについて調べました。



(1) 二人の予想した $AE = BC$ がいつでも成り立つことは、前ページの図において $\triangle AME = \triangle BMC$ を示すことから証明できます。 $AE = BC$ となることの証明を完成しなさい。

【資料1 全国学力状況調査の問題】

「図形と相似」の単元において、学習前にアンケートを行った。数学が好き・どちらかといえば好きという生徒は80%ほどだったが、得意だと感じている生徒は少ないことが分かった。また、計算や作図、基本的な関数の問題は得意と考える生徒は多いが、文章問題や図形の性質を使った証明の問題には苦手意識をもっていることが分かった。特に証明問題では、文章の意味や図形の性質を必要に応じて使い、結論までの道筋が理解できておらず、証明の組み立て方の見通しが立てられない生徒が多い。そこで、嫌悪感や苦手意識の払拭し、図形の考察において、成り立つ事柄を予想できる力をつけたいと考えた。そのためには、根拠となる定理や図形の性質を理解し、仮定から結論への見通しをもつ力を確実につけることを目標としたい。そして、生徒同士の対話的な活動を通じて、問題に応じた解法の利点を知り、よさを判別する力を身に付けさせたい。そうすることで、自分の考えをより深めることができると考え、今回の研究題目を設定した。

(2) 研究の仮説

仮説 1

相似条件や図形の性質を学ぶ場面で、数学的活動や対話的な活動を工夫して取り入れ、基礎基本となる知識・技能をしっかりと定着できるようにすれば、生徒は見通しをもち、帰納的に図形の性質の証明に取り組むことができるだろう。

仮説 2

いろいろな場合の図形の相似の関係から成り立つ性質を見出したり、その考えを対話的に出し合い、解決したりすることができれば、自分の考えをより深めることができるであろう。

(3) 仮説に対する具体的な手立て

仮説 1 に対する手立て

図形の性質や定理などを毎回の授業で板書し、図形を見たら反射的に図形の辺や角などについて成り立つ性質を見出す反復練習を行う。自分にわかることを積極的に言葉にしたり、図に記入したりする習慣を定着できるような授業を展開する。

仮説 2 に対する手立て

図形の性質が相似条件につながる感覚を身に付けるため、様々な形の図形の中から相似を見つけ、相似が成り立つことを説明する場面を作る。また、問題に応じた解法の利点やよさを判別する力を身に付けるため、帰納的に「相似であろう」図形を見つけ証明したり、また演繹的に相似な図形を見つけ証明したりしたことを出させるため、対話的活動を行う。

(4) 指導計画 (3年生 5章 図形と相似)

学習課題	教師の支援	時間
1 形が同じ図形について調べよう	生徒との気付きを大切に、生徒たちの発見をまとめながら相似な図形の性質をおさえる。	2【習得】
2 2つの三角形がどんな場合に相似になるか考えよう	合同がぴったり重なる図形、相似が拡大縮小した図形であることから合同条件から相似条件を考えさせる。	実践1(2/2) 2【習得】
3 三角形の相似条件を使った証明を考えよう	三角形の相似条件を板書する。相似の手順をおさえ、相似条件に合う性質を図示することを指導する。	実践2~4 3【活用】
4 平行線と線分の比の関係について調べよう	相似な図形を見つけ、それぞれ取り出して比較しやすくする。補助線の大切さについて指導する。	5【活用】
5 三角形の2辺の中点を結んだ線分の性質を調べよう	中点連結定理は三角形で使えること、三角形がない場合は補助線を引いて三角形をつくることを気付かせる。	1【習得】 1【活用】
6 相似な図形の面積にはどんな関係があるかを調べよう	相似な三角形の縦・横の相似比を考えさせ、多角形は三角形に分けて考えることを徹底する。	1【習得】 1【活用】
7 相似な立体の表面積・体積にはどんな関係があるかを調べよう	実物を用意して、縦・横・高さそれぞれの相似比を考えさせ、立体の相似について考えやすくする。	2【習得】 1【活用】
8 相似の考え方をいろいろな場面で利用しよう	距離・高さ・長さなど実際に計測しづらいものを計算で求める方法について対話する時間を確保する。	1【活用】 1【探究】
9 基本のたしかめ・章末問題	既習内容を確認し、根拠として利用しやすいように板書にまとめておく。	2【活用】

2 実践

(1) 実践 1 (2つの三角形がどんな場合に相似になるか考える授業)

図形の証明問題を解決していくとき、見通しをもって進めるためには相似条件を正しく理解しておく必要がある。第3時では元の形の2倍である三角形をコンパスや分度器を利用してかき、

そこから相似条件について学習した。第4時は相似条件を整理する学習である。

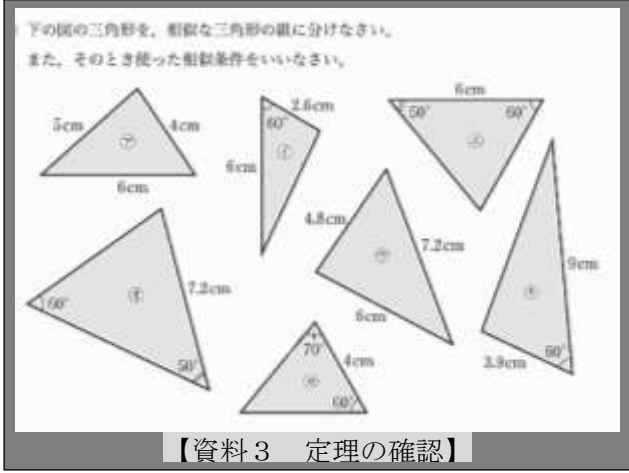
初めに、前時に学習した相似条件を覚えていたか確認したところ、全て正答した生徒は4割に満たなかった。そこで相似条件と合同条件を書いた用紙を並べて掲示し、比較させることで視覚的に習得することを図った。【資料2】のように発問し、比較させると生徒は、「合同条件と似ているから覚えられそうだ」といった意見や合同が相似な図形の特別な場合であることに気付く生徒もいた。相似条件の確認テストを翌日にも行うと完答率82%、3日目は94%となり、残りの6%は書き間違いであった。

【資料3】の相似な図形を見つける問題を行うと、短時間で見つけることができた。生徒にどうやって見つけたか聞くと、「まず、見た目で見つけ、そのあとに、相似条件にあてはまるかを確認した」と発言した。また、問題の④は、例年よく間違えていたが、「角の大きさをすべて見ればいいのね」、「それ③のパターンだから危険だね」と慎重に解き、間違える生徒はいなかった。机間指導で、全員の思考の流れを確かめると、演繹的に性質を見つけて間違いなく相似を見つける生徒だけでなく、図形の性質から帰納的に相似を見つけている生徒も多くいた。

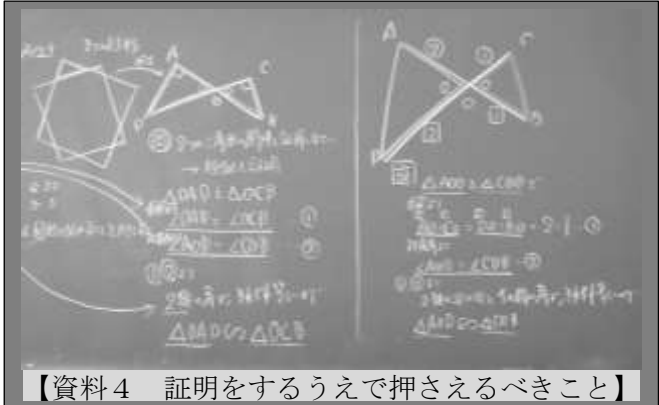
(2) 実践2 (見通しをもつ授業)

相似を使った証明において「見通しをもつこと」は相似である三角形を見つけることから始まる。角が等しいこと、辺の長さの比が等しいことを証明する場合も、始めにそれらの角や辺を含む三角形に注目する必要があることを教えた。その2つの三角形の相似を証明することが当たり前だが、苦手意識をもっている生徒はこれができている。よって、【資料4】のように証明に入るまでに手順があることを説明した。

- T 1 合同条件と相似条件で、似ているところ違うところで気付くことはありますか。
 - S 1 相似条件①と合同条件①はどちらも3つの辺を使っています。
 - S 2 S 1君と似ているけど、相似条件②と合同条件②は、2つの辺の長さとその間の角という部分を使っています。
 - S 3 合同条件の3番目は違えます
 - T 2 条件の③は全く違うかな。
 - S 4 角を2つ使うことは同じです。
 - T 3 グループで話し合ってみようか。
(略)
 - T 4 グループで話したことを発表してください。
 - S 5 合同条件と似ている点が多くて、角がいるのは0、1、2となっている。辺は最後が違うから、ちょっと注意が必要。この流れを覚えると相似条件が覚えられそうです。
 - S 6 ぴったり重なる合同と拡大縮小の相似で形は同じだから角度の条件は同じと考えればわかりやすいです。
 - S 7 ③は角2つで拡大縮小した相似な図形ができるので線分の比は必要ないです。
- 【資料2 第4時の授業記録】



【資料3 定理の確認】



【資料4 証明をするうえで押さえるべきこと】

相似の証明をするまでの手順

- ①証明したい角や辺を含む相似であろう三角形を図示（見つける）すること。
- ②問題文から分かる情報を、図に分かるだけ書き込むこと。（○×などの記号でよい）
- ③最後にどの相似条件にあてはまるか考える。

これらを行うことで、ほとんどの生徒が証明を作ることができるようになった。あとは文章表現の仕方だけである。定着するまで反復練習が大切になってくる。

そこで、再度【資料3】の問題を取り上げて、まずは言葉にして、証明を作る練習を行った。相似となる2つの三角形がどれであるか分かっているため、生徒は安心して証明に取り組み始めた。また、自信がなく、書くことに抵抗がある生徒も、対話を通して、周りの生徒と証明を口頭で確かめ合いながら作り上げることができた。その後、証明を筆記させるとすべての生徒が証明を完成させることができた。

このような練習をすることで、【資料4】の問題についても、まず、図の中に相似である三角形を見つけることから始めるという手順を手掛かりにして、証明を完成させる姿が見られた。

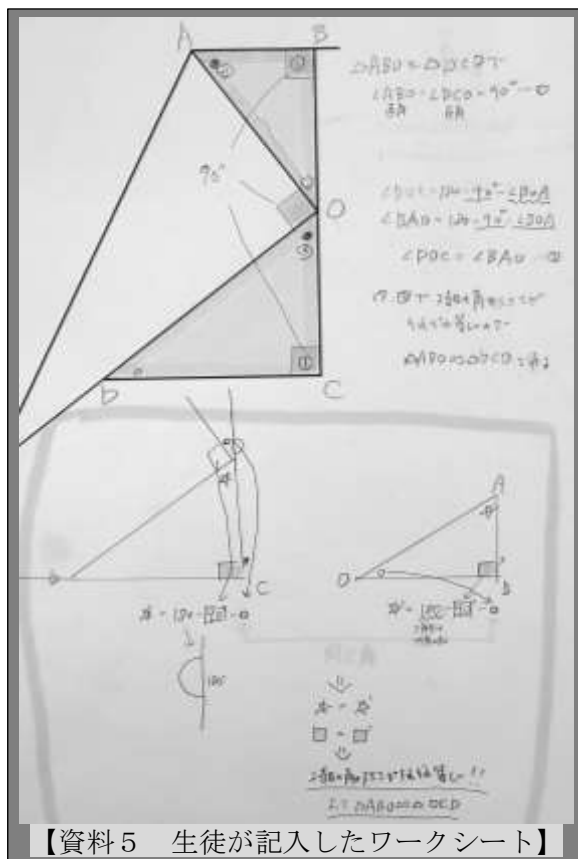
(3) 実践3 (対話による活動から解法を判別する授業1)

【資料5】の問題は、教科書の隅を折って図形を作り、視覚的に捉えやすい問題である。しかし、多くの生徒が特に苦手としている。自分で角に記号を振り、角度の大きさが分からない対応する2つの角の大きさ等しいことを証明する必要がある。そこで、ワークシートを利用することで、図示しやすく、性質を分かりやすくし、対話による活動を取り入れた学習を進めた。

生徒たちは教科書を動かして、相似である三角形の対応する角の位置を視覚的に捉え、2つの三角形を【資料5】のように図示した。生徒は2つの三角形には90度の角があることから、もう一つの角が等しいことをどう説明すればよいか悩んでいた。

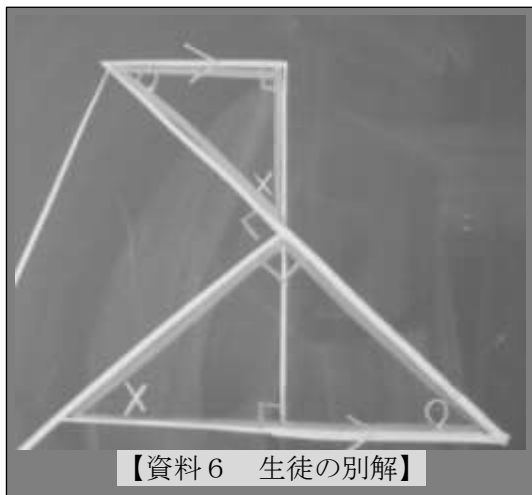
そこで、説明の理由として使えることとして、図形の角についてこれまでどんなことを学習してきたかを全体で聞いたところ、「三角形の合同」「四角形・三角形の性質」「多角形の内角の和」「垂直・平行」「直線の角度は180度」などが上がり、板書してまとめた。板書するうちにワークシートに文字を書き込む者、笑みがこぼれる者、「あっ」と声を漏らす者など、問題解決の見通しをもった生徒が現れた。

そこで対話による活動に戻して時間を作ると、生徒は意欲的に問題解決を図った。黒板で証明を説明するよう求めると多くの生徒がこぞって挙手した。すると生徒Aが「別のやり方でもいい



【資料5 生徒が記入したワークシート】

ですか」と【資料6】を使って発言したのである。生徒Aは平行線の性質を利用して考えた。説明に少し間違いがあったが、学級全員が意欲的に説明を聞いた。すると生徒Bが間違いを指摘し、生徒Aと生徒Bで【資料7】のように対話をしながら別解を完成させた。



【資料6 生徒の別解】

T 1 別の解き方について説明してください。
 生徒A 下の線を伸ばして、上の斜めの線を伸ばして交わると、上の辺と下の辺が平行なことから錯角が等しいです。そして対頂角が等しいです。下の2つの三角形は同じ形なので下の角が等しくて…
 生徒B 下の2つの三角形、線対称な図形じゃないよ。形は同じようだけど合同とは限らないよ
 生徒A え、どういうこと。
 生徒B 線分の比も角の大きさも下の2つを見ても相似条件をみたさないでしょ。
 生徒A うん。
 生徒B でも、この直角と錯角の○が等しいことを利用すると、×が等しいことがわかるよね。
 生徒A ほんとだ、最初の三角形の残りが○になるね。

【資料7 生徒Aと生徒Bの対話】

全員がその後、同じような考えで、この証明を作ってみた。その後の感想が以下の通りである。

生徒B（間違いを指摘した生徒）

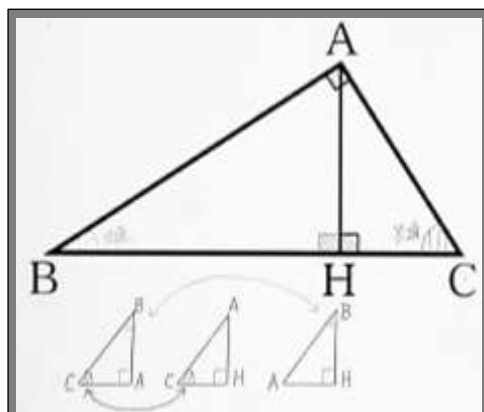
初めのやり方は簡単だった。でも、平行線を伸ばすことで解くことができるのはこれから応用が利きそうだ。次からは、このやり方から使おうと思った。

生徒C（初めの証明が一番遅かった生徒）

どっちもむずかしい。三角形の和と直線の和が 180° は覚えた。次もこうしたい。補助線は次解けない時に使う。

（4）実践4（対話による活動から解法を判別する授業2）

実践3の次時に【資料8】の問題を行った。問題は、3つの相似な三角形の証明である。実践3と同様に、生徒にとって難易度が高い。3つの三角形がどれも相似であることを同時に証明しなければいけないと考え、手が付けられない生徒がいた。そこで、個人追究の時間の後に、グループ学習を行い、お互いの図を見たり、対話したりする機会の設定をした。個人追究の時間の際に、机間指導を行い図示の状況を確認すると、グループの中で4人に1人は証明ができていた。対話する時間を十分にとることで徐々に証明もできるようになった。生徒たちは【資料9】のように対話をしながら、3つの相似な図形を【資料8】のように自分でワークシートに書き、対応するように記号も示していく中で「あっ、わかった」といった声が各グループで上がった。

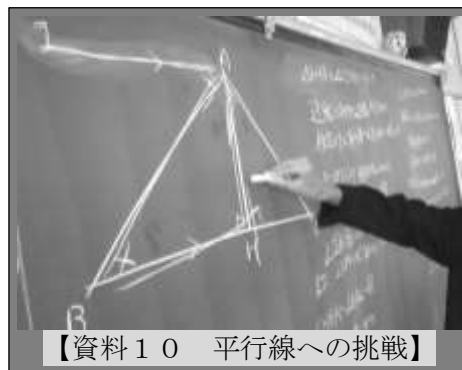


【資料8 自分で図示】

T 1 グループにして話してみてください。
 S 1 ワークシート見せ合おうよ。みんな真ん中置いて。
 S 2 （3つ並べた図形を指し）一緒だよ。
 S 3 形をそろえればわかりやすいのか。
 S 4 3つ書けばよかったのか。2つしか書いてないよ。
 S 1 2つでもいいよ。小さいのと中くらいのを証明して、次に中くらいと大きいのを証明すれば、小さいのと大きいのが相似ってことになるよ。
 S 4 そういうことか。3つ全部って何すればいいかわからなかった。
 S 3 3つ揃えて○×つけていくとすぐに証明できるんだね。
 S 1 図を描くと簡単でしょ。

【資料9 グループ活動での対話】

また、【資料10】のように平行線を引くことで別の視点からの証明を試みた生徒が複数いた。実際に【資料10】の補助線だけでは足りないが、図を【資料6】のように補助線を引き、長方形を作ることで証明ができる。残念ながらこれは授業時間で完結することができなかったが、放課に「これはどうですか」と質問する複数の生徒と解法に興味をもった生徒で教卓の周りがあふれた。



3 研究の成果と課題

(1) 研究の成果

「仮説1に対する手立てについて」

基礎・基本として徹底して習得した図形の性質と根拠の見つけ方や証明の手順をしっかりと習得できたことで、相似な図形を見つけ、見通しをもつことができた一番の足掛かりになった。また、見通しがもてたことで対話による学習を見ると、意欲の向上や自信をもつことができたようで、図形の性質をうまく使い、証明を帰納的に作り上げることができるようになった。

「仮説2に対する手立てについて」

対話を通して他人と考えを共有しつつ「これってどういうこと」「これわかりにくい」と言った思考の共有から、問題に応じた解法の利点を考え、自分たちの考えを再構築することができた。また、様々な図形を扱う中で、図形に対する直感や洞察の能力を伸ばすとともに、帰納的に考えたり、もしくは演繹的に考えたりするなどの数学的な推論の理解を深め、論理的に表現する能力を高めることができたと考える。

(2) 今後の課題

今回、対話的な活動を通して、問題解決を図ることに力を入れて取り組んできたが、ペア学習、グループ学習の域を超えていない。知識としての内容を一方的に理解するだけでなく、生徒間での対話から疑問が生まれ授業が組み立てられ、全員が主体的に取り組める授業にしていきたい。特に、対話の中では主体性が見えたが、さらに進んで自分たちで取り組む姿はまだ不足を感じた。いつでもより主体的となるための手立てを考えたい。

4 おわりに

【資料11】では生徒が例題の答えを隠して自主的に解いている。例題は、多くの場合で教え込みとして利用している。しかし、課題解決問題として扱えば、生徒が答えを確認しやすく、形式が答えと異なれば「この形式でなければだめですか」とそこから授業を展開できる。生徒は既習の数学を利用して挑戦、少し答えをみてヒントとし、自信をもって教え合いなど意欲的に活動ができる。今回の研究を通して、生徒の数学的に見方・考え方を伸ばし、生徒の思いを大切に、毎日の授業にこそ工夫を凝らすべきであると考え。

